

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul intégral (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

I) INTEGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE.

1) Activité

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o; \vec{i}; \vec{j})$
l'unité choisie étant le centimètre .

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 3$ et on note C sa courbe représentative.

Soit R la partie du plan limitée par C , l'axe des abscisses , et les droites d'équations :

$x = -1$ et $x = 2$.

a) Calculer l'aire A en cm^2 de R.

b) Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(2) - F(-1)$.

c)) Déterminer une autre primitive G de f sur $\mathbb{R}$ et calculer $G(2) - G(-1)$.

2) Intégral et primitive.

2.1 Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I ; et F une fonction primitive de f sur I . Le nombre $F(b) - F(a)$ s'appelle l'intégrale de la fonction f entre a et b on écrit : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
on lit somme $f(x)dx$ de a à b et on l'appelle intégrale de a à b .

Le réel a s'appelle la borne inférieure de l'intégrale et le réel b s'appelle la borne supérieure de l'intégrale.

Remarque : 1) Dans l'écriture : $\int_a^b f(t)dt$
la variable t s'appelle une variable muette, on peut le changer par n'importe quelle variable tant qu'elle ne figure pas dans l'une des deux bornes.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = [F(x)]_a^b$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul intégral (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

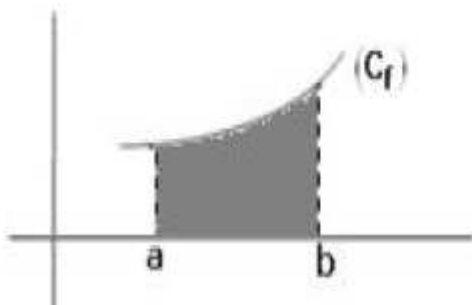
2.2) Interprétation géométrique de l'intégrale

si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

l'intégrale de a à b de la fonction f représente l'aire

du domaine délimité par :

- L'axe des abscisses
- Les droites d'équation : $x = a$ et $x = b$
- La courbe de f .



2.3 Propriété : Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ c'est-à-dire $\int_a^b f(x)dx$ existe et finie.

2.4 Exemples :

Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_2^4 3x dx \quad 2) J = \int_0^1 (2x + 3) dx$$

$$3) K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt \quad 4) L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta$$

Solution : 1) la fonction $x \mapsto 3x$ est continue sur $[2; 4]$

Une primitive sur $[2; 4]$ est : $x \mapsto \frac{3}{2}x^2$

$$\text{Donc : } I = \int_2^4 3x dx = \left[\frac{3}{2}x^2 \right]_2^4 = \frac{3}{2} \times 4^2 - \frac{3}{2} \times 2^2 = 18$$

$$2) J = \int_0^1 (2x + 3) dx = \left[x^2 + 3x \right]_0^1 = (1 + 3) - (0) = 4$$

$$3) K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt = \left[\ln t \right]_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$$

$$4) L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta = \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul intégral (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx \quad 2) I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx$$

$$3) I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \quad 4) I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt$$

$$5) I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} te^{-t^2} dt \quad 6) I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$7) I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad 8) I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$$

$$9) I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad 10) I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$$

Solution : 1) $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx = \left[2 \frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 = [x^2 - x]_0^2$

$$I_1 = (2^2 - 2) - (0^2 - 0) = 4 - 2 = 2$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{4}x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + 2x \right]_{-1}^1$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5} - 1 + 2 \right) - \left(\frac{1}{5}(-1)^5 - (-1)^4 - 2 \right)$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{5} - 1 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{5} - 1 - 2 \right) = \frac{1}{5} - 1 + 2 + \frac{1}{5} + 1 + 2 = \frac{2}{5} + 4 = \frac{22}{5}$$

$$3) I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$6) I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln^2 x dx = \int_1^e \ln' x \times \ln^2 x dx$$

$$I_6 = \left[\frac{1}{2+1} \ln^{2+1} x \right]_1^e = \frac{1}{3} \ln^3 e - \frac{1}{3} \ln^3 1 = \frac{1}{3}$$

$$7) I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = [\ln |e^x + 1|]_0^{\ln 2}$$

$$I_7 = \ln |e^{\ln 2} + 1| - \ln |e^0 + 1| = \ln |3| - \ln |2| = \ln 3 - \ln 2 = \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$9) I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e (\ln x)' (\ln x)^1 dx = \left[\frac{1}{1+1} (\ln x)^{1+1} \right]_1^e$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} (\ln e)^2 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx = 2 \int_2^3 \frac{(x^2+3x-4)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}} dx = 2 \left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3$$

$$I_{10} = 2 \left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3 = 2(\sqrt{14} - \sqrt{6})$$

$$I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2} (2t)' e^{2t} dt = \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - \frac{1}{2} e^{2 \times 0}$$

$$I_4 = \frac{1}{2} e^{\ln 2^2} - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} 4 - \frac{1}{2} e^0 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$5) I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} te^{-t^2} dt = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} -\frac{1}{2} (-t^2)' e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$$

$$I_5 = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}} = -\frac{1}{2} e^{-(\sqrt{\ln 2})^2} + \frac{1}{2} e^{-0^2} = -\frac{1}{2} e^{-(\ln 2)} + \frac{1}{2}$$

$$I_5 = -\frac{1}{2} e^{-\ln 2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{\ln 2}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{(e^x - e^{-x})'}{e^x - e^{-x}} dx = [\ln |e^x - e^{-x}|]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I_8 = \ln |e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}| - \ln |e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}| = \ln \left| 3 - \frac{1}{e^{\ln 3}} \right| - \ln \left| e^{\ln 2} - \frac{1}{e^{\ln 2}} \right|$$

$$I_8 = \ln \left| 3 - \frac{1}{3} \right| - \ln \left| 2 - \frac{1}{2} \right| = \ln \left(\frac{8}{3} \right) - \ln \left(\frac{3}{2} \right) = \ln \left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{2}} \right) = \ln \left(\frac{16}{9} \right)$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul intégral (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Formules importantes : $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a \quad ; \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad ; \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \times \cos a$$

3) Intégral et operation et règles de calculs

Propriété1

Soient f , g et f' des fonctions continues sur un intervalle I , a , b et c trois éléments de I et α un réel, on a :

$$1) \int_a^b f'(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$2) \int_a^b \alpha dx = [\alpha x]_a^b = \alpha(b - a)$$

$$3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$4) \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$5) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(Relation de Chasles)

$$6) \int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \text{ (linéarité)}$$

$$7) \int_a^b (\alpha f)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

Exemple1 : Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_0^3 |x - 1| dx \quad \quad 2) J = \int_{-2}^0 |x(x + 1)| dx$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul intégral (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Solution : 1) on a $x \in [0, 3]$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ on va étudier le signe de : $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

la Relation de Chasles donne :

$$I = \int_0^3 |x-1| dx = \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^3 |x-1| dx$$

$$I = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$$

$$I = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{5}{2}$$

donc : $|x(x+1)| = x(x+1)$

b) si $x \in [-1; 0]$ alors : $x(x+1) \leq 0$

$$|x(x+1)| = -x(x+1)$$

$$2) J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$$

$$x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$$

on va étudier le signe de : $x(x+1)$

a) si $x \in [-2; -1]$ alors : $x(x+1) \geq 0$

La Relation de Chasles donne :

$$J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx = \int_{-2}^{-1} |x(x+1)| dx + \int_{-1}^0 |x(x+1)| dx$$

$$J = \int_{-2}^{-1} (x^2 + x) dx + \int_{-1}^0 (-x^2 - x) dx$$

$$J = \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0$$

$$J = \left(\frac{1}{6} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) + \left(0 - \left(-\frac{1}{6} \right) \right) = 1$$

4) Intégrales et ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ et $a \leq b$

1) Si f est positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

2) Si $(\forall x \in [a; b]); f(x) \leq g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

3) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Faire un schéma d'illustration de la 3^{ème} propriété

II) LA VALEUR MOYENNE ET THEOREME DE LA MEDIANE

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul intégral (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Théorème et définition :

si f est une fonction continues sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ et $a \leq b$ alors il existe au moins un réel c dans $[a ; b]$.

$$\text{Tel que : } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ S'appelle La valeur moyenne de f sur $[a ; b]$

Exemple : on considère la fonction numérique

$$\text{définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Déterminer La valeur moyenne de f sur $[0; \ln 2]$

Solution : La valeur moyenne de f sur $[0; \ln 2]$

$$\begin{aligned} \text{Est : } f(c) &= \frac{1}{\ln 2 - 0} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{1}{\ln 2 - 0} \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} dx \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left[-\frac{1}{e^x + 1} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3 \ln 2} \end{aligned}$$

Corriger cette intégrale !!!

III) TECHNIQUES DE CALCULS D'UNE INTEGRALE

1) L'utilisation directe des fonctions primitives

La fonction	Sa fonction primitive
$\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$
$x^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times \arctan(x) + c$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul intégral (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

1-2 Exemples : Calculer les intégrales suivantes :

$$1) B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

Solution : 1) $B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \int_1^e (\ln x)' (\ln x)^3 dx$

$$= \left[\frac{(\ln x)^4}{4} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^4}{4} - \frac{(\ln 1)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

2) Intégration par partie

2-1 Introduction

Parfois on n'arrive pas à trouver une fonction primitive usuelle en se basant directement sur le tableau des primitives ..alors on utilise la formule de dérivation d'un produit

$(uv)' = u'v + uv'$...donc si dans l'intégrale on a la forme $u'v$ ou uv' et en plus l'une d'elles est facilement intégrable directement en utilisant une primitive du tableau usuel ..alors

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = \int_a^b (uv)'(x) dx - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

2-3 Exemples :

Calculer l'intégrale suivante :

$$1) I = \int_0^\pi x \sin x dx$$

$$2) J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$$

$$3) K = \int_1^e \ln x dx$$

Solution : 1) $I = \int_0^\pi x \sin x dx$

On pose : $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = x$

Donc $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = 1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0; \pi]$ et u' et v' sont continues sur $[0; \pi]$

donc: $I = [-x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x dx = [-x \cos x]_0^\pi - [-\sin x]_0^\pi = \pi$

$$2) J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$$

On pose : $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$

Donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0; \ln 2]$ et u' et v' sont continues sur

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul intégral (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

$[0; \ln 2]$

$$\text{Donc : } J = \left[x e^x \right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx = \ln 2 e^{\ln 2} - \left[e^x \right]_0^{\ln 2}$$

$$J = 2 \ln 2 - (e^{\ln 2} - 1) = 2 \ln 2 - (2 - 1) = 2 \ln 2 - 1$$

$$3) K = \int_1^e \ln x dx \text{ on a } K = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e 1 \times \ln x dx$$

On pose : $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$

Donc : $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[1; e]$ et u' et v' sont continue sur $[1; e]$

$$\text{Donc : } K = \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = e \ln e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx$$

$$K = e - \int_1^e 1 dx = e - \left[x \right]_1^e = e - e + 1 = 1$$

Exercice7 : En utilisant une intégration par partie

$$\text{calculer : } 1) I = \int_0^1 x e^{2x} dx \quad 2) J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$3) K = \int_0^1 x \sqrt{e^x} dx \quad 4) L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$5) M = \int_1^e (x \ln x) dx \quad 6) N = \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

Solution :

1) $I = \int_0^1 x e^{2x} dx$ la démarche est la même

$$I = \int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} \left[x e^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{3x^3} \ln x \right]_1^{e^3} - \int_1^{e^3} \frac{1}{3x^3} \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{3x^3} \ln x \right]_1^{e^3} - 3 \int_1^{e^3} x^{-\frac{2}{3}} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left[x e^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{4} \left[e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$$

$$I = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_1^{e^3} x^{-\frac{2}{3}} \ln x dx$$

$$= \left[\frac{1}{3x^3} \ln x \right]_1^{e^3} - 9 \left[\frac{1}{x^3} \right]_1^{e^3} = 9$$

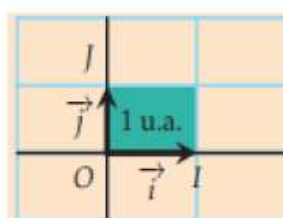
V) INTEGRALE ET SURFACE.

unité d'aire

On note I et J les points tels

que : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

L'unité d'aire, que l'on note u.a., est l'aire du rectangle dont O, I et J forment trois sommets.



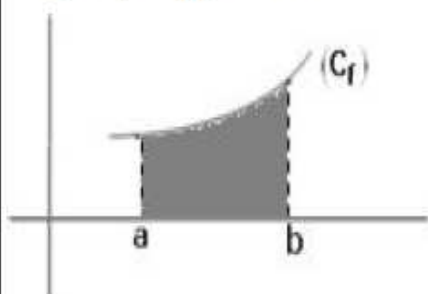
Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul intégral (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Proposition1 :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ et C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

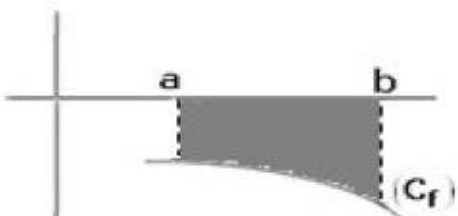
L'intégrale de a à b de f est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

$$A(\Delta_f) = \int_a^b f(x) dx \text{ ua}$$



Remarque : si f une fonction continue et négatif sur un intervalle $[a ; b]$

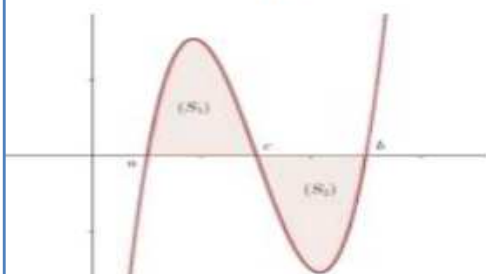
$$A(\Delta_f) = -\int_a^b f(x) dx \text{ ua}$$



Proposition2 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = a$ et $x = b$.

est : $A(\Delta_f) = \int_a^b |f(x)| dx \text{ ua}$



Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul intégral (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Exercice10 :

$(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit f définit par : $f(x) = 1 - e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : C_f ,

l'axe des abscisses et les droites :

$x = \ln 2$ et $x = \ln 4$

Solution : il suffit de calculer : $I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)| dx$

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)| dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^x| dx$$

On sait que : $\ln 2 \leq x \leq \ln 4$ donc : $e^{\ln 2} \leq e^x \leq e^{\ln 4}$

Donc : $2 \leq e^x \leq 4$ donc $e^x > 1$ par suite: $1 - e^x < 0$

Donc:

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^x| dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} -(1 - e^x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^x - 1) dx$$

$$I = \left[e^x - x \right]_{\ln 2}^{\ln 4} = (e^{\ln 4} - \ln 4) - (e^{\ln 2} - \ln 2)$$

$$I = (4 - 2\ln 2) - (2 - \ln 2) = 4 - 2\ln 2 - 2 + \ln 2 = 2 - \ln 2$$

$$\text{Donc : } A = (2 - \ln 2) \times 2cm \times 2cm = 4(2 - \ln 2)c^2m$$

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et soit S la surface du domaine limité par (C_f) ; (C_g) et les droites $x = a$; $x = b$ on a :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad \text{Ua}$$