

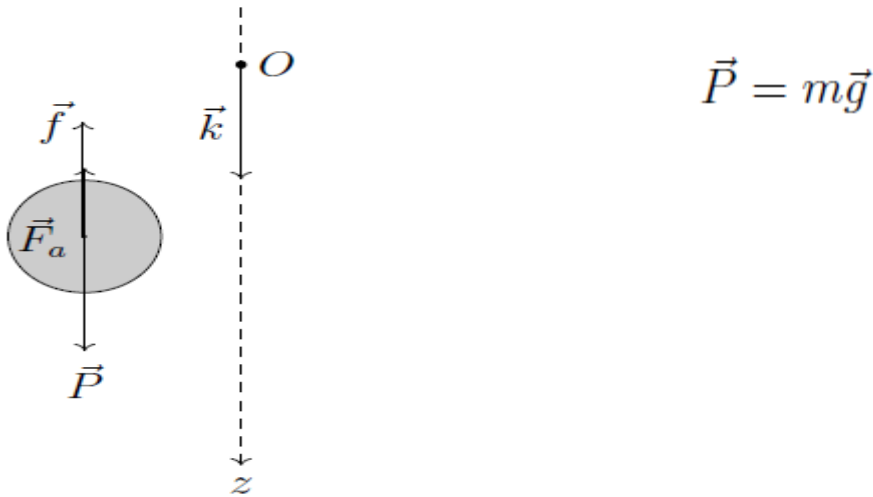
Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Chute libre vertical d'un solide (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Les forces agissantes sur un solide en chute verticale

1. Le poids

Dans le champ de pesanteur terrestre, tous les solides sont soumis à une force exercée par la terre, c'est le poids du corps.

Le vecteur poids est le produit de la masse m du solide et le vecteur champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$:



2. Force de frottement fluide

On modélise l'ensemble de forces de frottement entre le solide et le fluide par une seule force $\vec{f}$, c'est la force de frottement fluide.

Il existe plusieurs types de forces de frottement fluide :

. Si le solide est petit et sa vitesse est faible, le vecteur s'écrit :

$$\vec{f} = -h.v.\vec{k}$$

. Si le solide est petit et sa vitesse est grande , le vecteur s'écrit :

$$\vec{f} = -h.v^2.\vec{k}$$

$$\vec{f} = -h.v^n.\vec{k}$$

Formule générale

h est le coefficient de frottement fluide en kg.s^{-1} , il dépend de la forme et le volume du solide, ainsi la nature du fluide et sa viscosité.

3. La poussée d'Archimède

Tout solide immergé dans un fluide est soumis à l'action d'une force exercée par ce fluide. Cette force est appelée poussée d'Archimède, notée $\vec{F}_a$.

La poussée d'Archimède est égale à l'opposée du vecteur poids du volume du fluide déplacé :

$$\vec{F}_a = -\vec{P}_f = -m_f \vec{g}$$

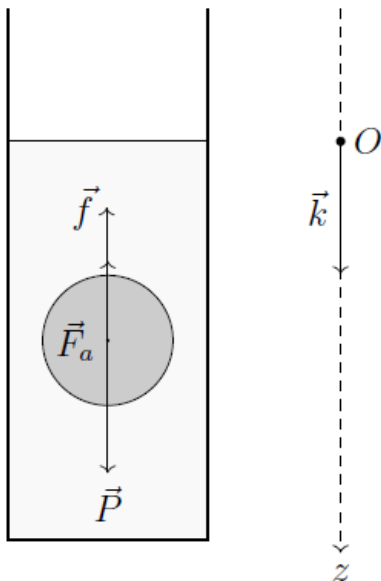
$$m_f = \rho_f \cdot V$$

m_f La masse du fluide déplacé, ρ_f la masse volumique du fluide et V son volume déplacé.

$$\begin{cases} \text{La direction :} & \text{Verticale} \\ \text{Le sens :} & \text{Vers le haut} \\ \text{La norme :} & F_a = \rho_f \cdot V \cdot g \end{cases}$$

Chute verticale d'un corps dans un fluide par frottement

On considère une bille de masse m complètement immergée dans un fluide



Le système étudié : {La bille}

Bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids de la bille} \\ \vec{F}_a : & \text{La poussée d'Archimède} \\ \vec{f} : & \text{La force de frottement} \end{cases}$$

Dans le référentiel terrestre supposée galiléen on associe le repère (O, z) , En appliquant la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{F}_a + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$P - F_a - f = ma$$

$$mg - \rho V g - h v^n = ma$$

$$\underbrace{g \left(1 - \frac{\rho V}{m}\right)}_A - \underbrace{\frac{h}{m}}_B v^n = \frac{dv}{dt}$$

Donc l'équation différentielle est donnée par

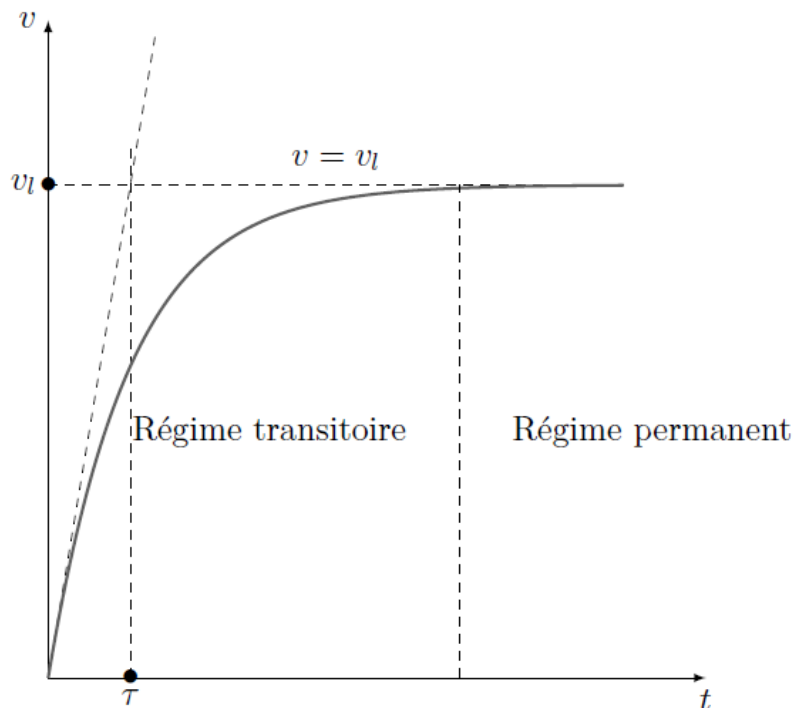
$$A - Bv^n = \frac{dv}{dt}$$

1. Les régimes d'une chute verticale

Au cours d'une chute verticale on distingue deux régimes, qui sont :

Le régime initial (transitoire) : Dans lequel la vitesse croît au cours du temps.

Le régime permanent : Dans lequel la vitesse reste constante au voisinage d'une vitesse appelée vitesse limite v_l .



Régime transitoire :

La vitesse de la bille augmente, la valeur de f augmente et l'accélération diminue.

Régime permanent :

La vitesse de la bille et la valeur de f deviennent constantes et l'accélération est nulle. L'accélération à $t = 0$ est donnée par

$$a_0 = \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \frac{v_l}{\tau}$$

Ou bien à partir l'équation différentielle

$$A - Bv^n = a \xrightarrow{v=0} a = A = g \left(1 - \frac{\rho V}{m} \right)$$

La vitesse limite peut être calculé graphiquement, ou bien à partir l'équation différentielle

$$A - Bv^n = \frac{dv}{dt} \xrightarrow{v=v_l} A - Bv_l^n = 0$$

$$v_l = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

Remarque : La durée du mouvement initial, c'est-à-dire la durée dans du régime transitoire est environ 5τ .

2- La méthode d'Euler pour la résolution approchée d'une équation différentielle

$$a = \frac{dv}{dt} = A - Bv^n$$

La méthode d'Euler est une méthode qui nécessite la répétition du même calcul, elle permet de savoir la vitesse à un instant donnée. Elle comporte deux étapes :

La première étape : Si on connaît la vitesse initiale v_0 , on détermine la valeur de a_0 à partir la relation suivante : $a_0 = A - Bv_0^n$.

$$a_0 = A - Bv_0^n.$$

La deuxième étape : À un instant $t_1 = t_0 + \Delta t$, avec Δt est très petite, on a : $\Delta v = v_1 - v_0$ et $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, en supposant que $v_0 = 0$, on déduit que : $v_1 = a_0 \Delta t = A \Delta t$, d'où : $a_1 = A - Bv_1^n$.

À l'instant $t_2 = t_1 + \Delta t$, on a : $\Delta v = v_2 - v_1 = a_1 \Delta t$ c'est-à-dire $v_2 = a_1 \Delta t + v_1$ et $a_2 = A - Bv_2^n$. En suivant les mêmes étapes on peut calculer jusqu'au v_n et a_n , car la méthode d'Euler est itérative.

3- Généralisation de la méthode d'Euler

À un instant t_i , on écrit :

$$a_i = \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t_i} = A - Bv_i^n$$

À l'instant $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, où Δt est infinitésimal (très petite), on peut adopter l'approximation suivante :

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} \approx \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t_i} = a_i$$

Ceci conduit à la relation suivante :

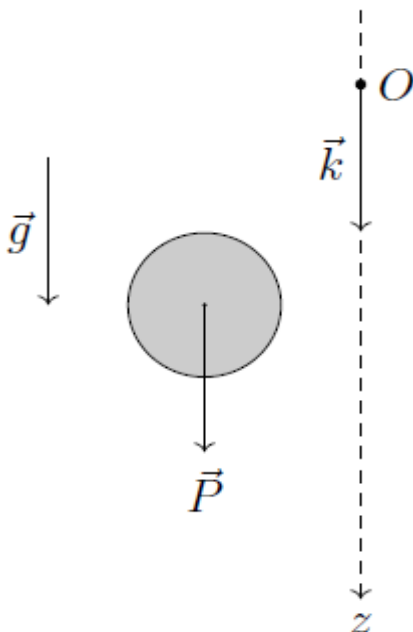
$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$$

La combinaison de ces relations nous permet de connaître v et a à chaque pas Δt , en suivant un enchainement de calcul :

$t_0 = 0$	$v_0 = 0$	$a_0 = A - Bv_0^n$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$	$a_1 = A - Bv_1^n$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t$	$a_2 = A - Bv_2^n$
.....		
$t_i = t_{i-1} + \Delta t$	$v_i = v_{i-1} + a_{i-1} \Delta t$	$a_i = A - Bv_i^n$

La chute libre verticale

Un solide est en chute libre lorsqu'il est soumis qu'à l'action de son poids, cette chute n'est réalisable que si le solide se trouve dans le vide.



$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{P} &= m\vec{a} \\ m\vec{g} &= m\vec{a} \\ \vec{g} &= \vec{a} \end{aligned}$$

Par projection sur l'axe (Oz) on trouve :

$$a = g \iff \frac{dv}{dt} = g \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g$$

$$v = gt + v_0$$

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$$

Exercice

Données :

- Les actions exercées par le fluide sur la bille sont modélisées par une force de frottement fluide :

$$\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$$

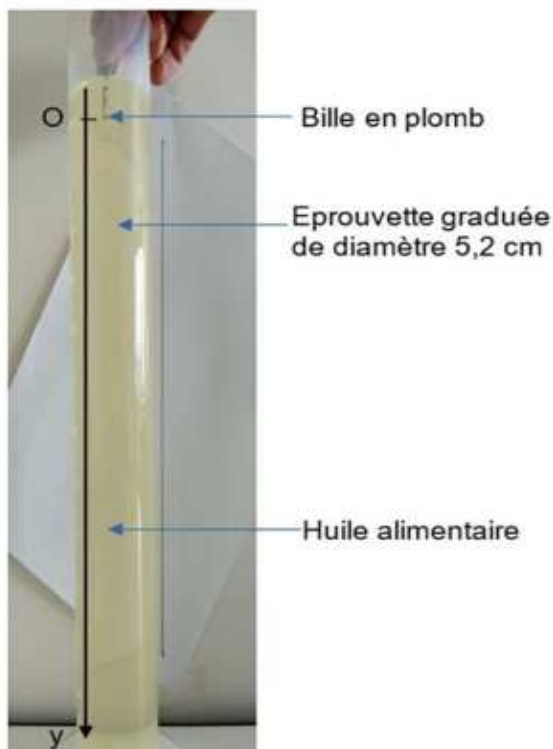
dans laquelle η est la viscosité du fluide, r est le rayon de la bille et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de la bille ;

- intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- intervalle des valeurs courantes de la viscosité η d'une huile alimentaire : entre 60 et 100 mPa · s.

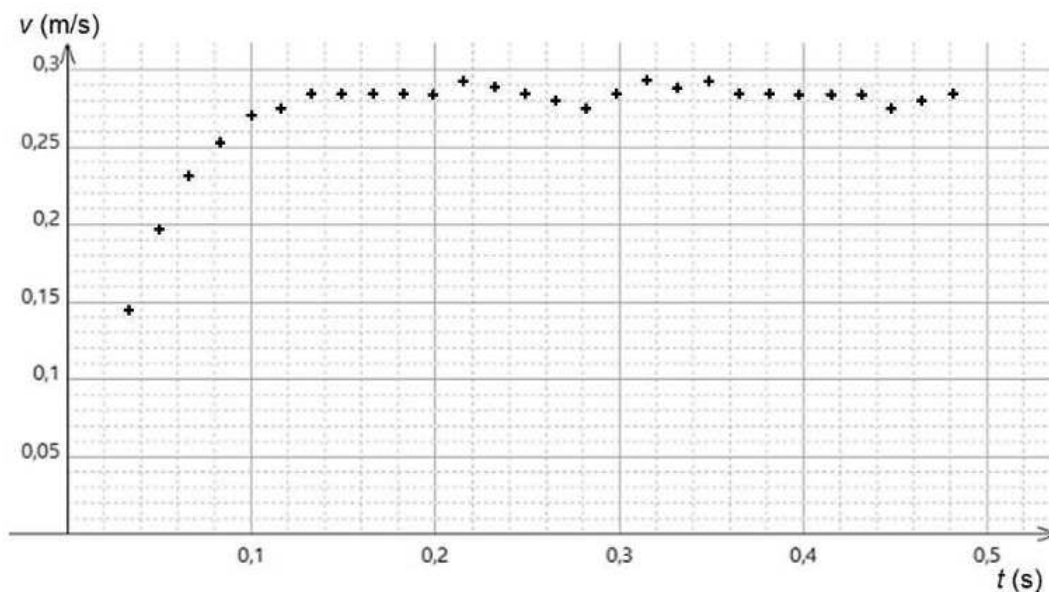
Une bille de plomb de rayon $r = 1,03 \text{ mm}$ et de masse $m = 0,056 \text{ g}$ est lâchée à $t = 0 \text{ s}$ sans vitesse initiale dans une huile alimentaire (photo ci-dessous).

On nomme $v(t)$ la valeur de la vitesse de la bille, exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, à l'instant t , exprimé en seconde.

L'axe Oy est orienté suivant la verticale descendante.



Le pointage des positions successives de la bille permet de tracer l'évolution de sa vitesse en fonction du temps



1. Justifier, à partir des résultats de la figure 1, que la chute de la bille n'est pas une chute libre.
2. Estimer graphiquement la valeur de la vitesse de chute de la bille en régime permanent.

Pour la suite de l'exercice, on prendra comme valeur de la viscosité de l'huile alimentaire $\eta = 80 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

3. En considérant le système {bille} dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, écrire l'expression vectorielle de la seconde loi de Newton.
4. En déduire, par projection de la deuxième loi de Newton sur l'axe (Oy) , que la vitesse de chute de la bille doit vérifier l'égalité :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{6\pi\eta r}{m}v + g$$

Étude mathématique de la vitesse

On souhaite déterminer une expression de la vitesse de la chute de la bille. Les données physiques de l'expérience conduisent à résoudre l'équation différentielle (E)

$$y' = -27,7y + 9,81$$

5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
6. Montrer que l'unique solution v de l'équation différentielle (E) qui vérifie $v(0) = 0$ est définie par l'expression

$$v(t) = \frac{9,81}{27,7} \times (1 - e^{-27,7t})$$

7. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$

Corrigé

Question 1

Un système est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids.

Entre $t = 0$ et $t = 0,12 \text{ s}$, le mouvement de la bille est rectiligne accéléré au début du mouvement puis devient rectiligne uniforme : les forces qui s'exercent sur le système se compensent. Le poids, vertical vers le bas est donc compensé par une force de frottement fluide de sens et direction opposés et de même valeur : la bille n'est pas soumise qu'à son poids ; elle n'est donc pas en chute libre.

Question 2

En régime permanent, la vitesse est constante et on peut estimer graphiquement sa valeur à $0,28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Question 3

On étudie le mouvement de la bille dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

La bille est soumise à deux forces : son poids et la force de frottement fluide.

La deuxième loi de Newton énonce que dans un référentiel galiléen, la résultante des forces exercées sur le système est égale au produit de sa masse m et du vecteur-accelération $\vec{a}$ de son centre d'inertie.

La seconde loi de Newton appliquée au système « bille » permet d'écrire l'expression vectorielle :

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Question 4

Le mouvement a lieu seulement sur l'axe (Oy) , on peut projeter cette relation sur l'axe vertical Oy en exprimant tous les termes qui en dépendent en fonction de v :

$$\vec{P} + \vec{f} = m_{bille}\vec{a}$$

Les coordonnées des vecteurs projetées sur l'axe (Oy) sont :

$$\vec{P}(P_y = mg)$$

$$\vec{f}(f_y = -6\pi\eta r v)$$

$$\vec{a}\left(a_y = \frac{dv}{dt}\right)$$

D'après la deuxième loi de Newton projetée sur l'axe (Oy) :

$$P_y + f_y = ma_y$$

Soit :

$$\begin{aligned}mg - 6\pi\eta Rv &= m \frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= g - \frac{6\pi\eta r}{m} v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{6\pi\eta r}{m} v + g\end{aligned}$$

Question 5

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$f(t) = Ce^{-27,7t} + \frac{9,81}{27,7} \quad \text{où } C \text{ est un réel}$$

Question 6

$v(0) = 0$ signifie que

$$\begin{aligned}Ce^{-27,7 \times 0} + \frac{9,81}{27,7} &= 0 \\ C &= -\frac{9,81}{27,7}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}v(t) &= -\frac{9,81}{27,7} e^{-27,7t} + \frac{9,81}{27,7} \\ v(t) &= \frac{9,81}{27,7} \times (1 - e^{-27,7t})\end{aligned}$$

Question 7

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-27,7t} = 0 \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - e^{-27,7t} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{9,81}{27,7} \times (1 - e^{-27,7t}) = \frac{9,81}{27,7}$$