

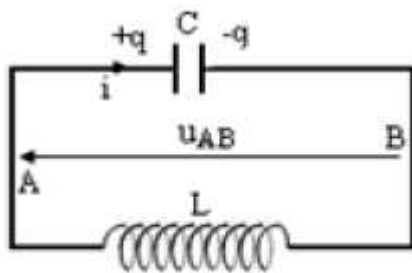
Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Circuit RLC (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Circuit RLC

Association série d'un condensateur chargé de capacité C et de charge initiale q0 et d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r négligeable.

I. Etude du circuit LC

1. Montage : Décharge d'un condensateur dans une bobine



2. Equation différentielle

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot U_C = 0 \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \omega_0 : \text{Pulsation propre (en rad/s)}$$

$$U_C(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

U_m : L'amplitude (la valeur maximale de la tension $U_C(t)$)

$\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi$: La phase à l'instant t

φ : la phase à l'origine des temps $t=0$

T_0 : la période propre (s)

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$: Pulsation propre (en rad/s)

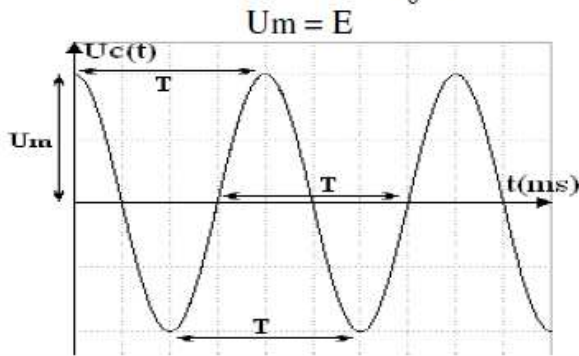
$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C} \quad i(t) = C \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} = -C \cdot U_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

$$I_m = C \cdot U_m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right) = C \cdot U_m \cdot \left(\frac{2\pi}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}\right) = U_m \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Circuit RLC (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

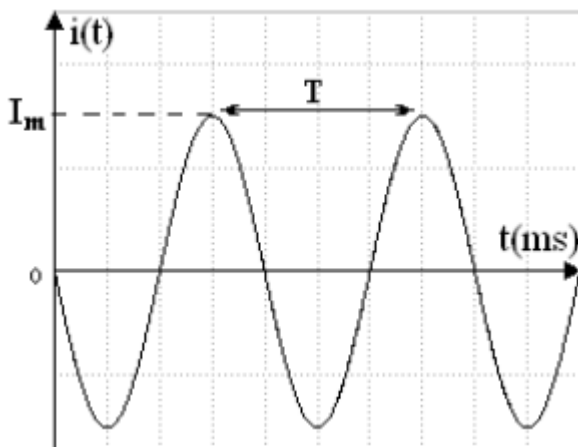
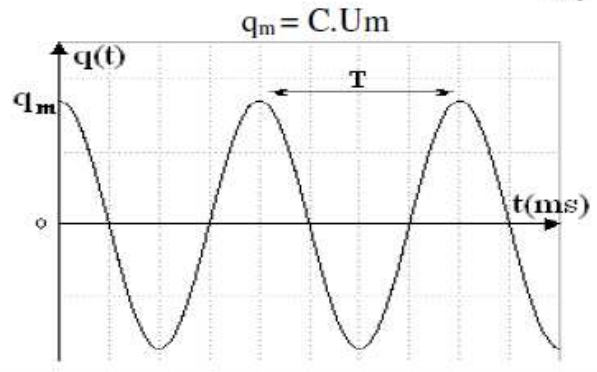
❖ Tension $U_c(t)$:

$$U_c(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$$



❖ Charge $q(t)$:

$$\text{On a } q = C \cdot U_c \text{ d'où } q(t) = C \cdot U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right)$$



Energie totale E_T

L'énergie totale E_T emmagasinée dans un circuit LC est à tout instant la somme de l'énergie électrique E_e dans le condensateur et de E_m l'énergie magnétique dans la bobine

Montrons que c'est une constante

- 1- Exprimer le tout avec U_c
- 2- Dériver
- 3- Utiliser l'équation différentielle

$$E_T = E_e + E_m$$

$$E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2} C \cdot U_c^2 + \frac{1}{2} L \cdot i^2$$

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C \cdot U_c^2 + \frac{1}{2} L \cdot i^2 \right)$$

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2} C \cdot \frac{d}{dt} U_c^2 + \frac{1}{2} L \cdot \frac{d}{dt} i^2$$

$$= C \cdot U_c \cdot \frac{dU_c}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt}$$

$$= C \cdot \frac{dU_c}{dt} \left(U_c + L \cdot C \cdot \frac{d^2 U_c}{dt^2} \right) = 0$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Circuit RLC (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

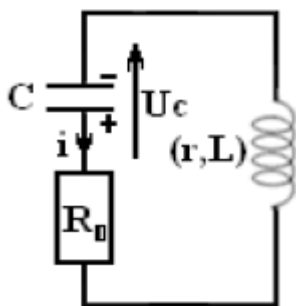
$$U_C + L \cdot C \cdot \frac{d^2 U_C}{dt^2} = 0$$

Conclusion :

E_T est une constante au cours du temps donc l'énergie totale se conserve.

Les oscillations correspondent à un échange énergétique entre le condensateur et la bobine : Il y a conversion d'énergie électrique en énergie magnétique et réciproquement.

II. Etude du circuit RLC



Le montage est constitué de :

- Un condensateur de capacité C, initialement chargé et porteur de la charge q_0 et une tension $U_0 = E$
- Une bobine de coefficient d'induction L et de résistance interne r
- Un conducteur ohmique de résistance R_0

La résistance totale du circuit est $R = R_0 + r$

Equation différentielle

$$U_R + U_C + U_L = 0$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} q = 0$$

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} U_C = 0$$

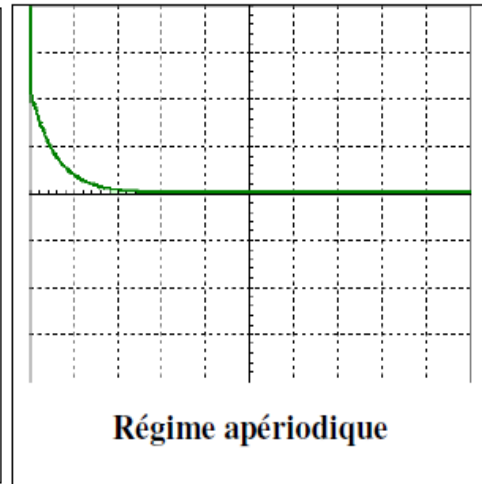
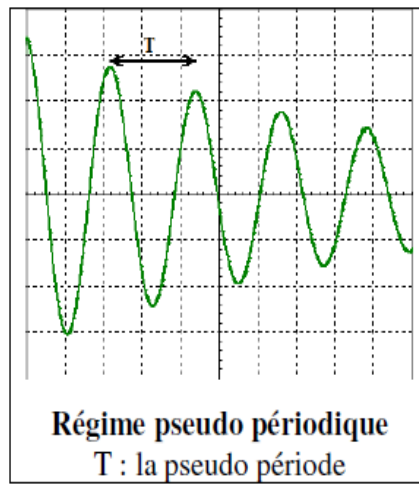
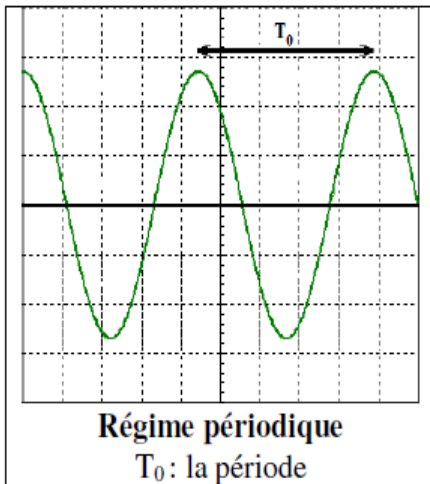
La grandeur $\frac{R}{L} \cdot \frac{dU_C}{dt}$ ou $\frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt}$

- Concrétise le caractère non-oscillatoire du système (l'amortissement des oscillations électriques)
- Détermine le régime des oscillations (périodique, pseudo périodique ou apériodique)

La résistance est le dipôle qui influe sur l'amplitude des oscillations, quand la résistance R du circuit est

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Circuit RLC (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

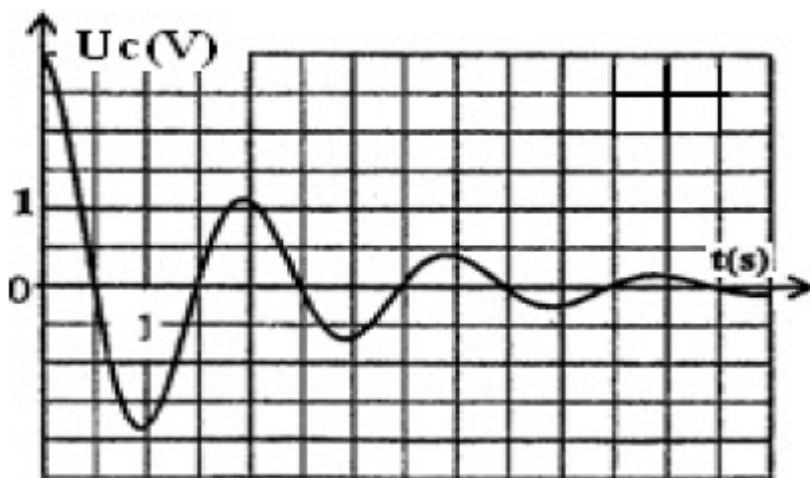
- **Faible** les oscillations du système sont amorties, le régime est **pseudopériodique**.
- **Élevée** le système n'oscille pas et donc le régime est **apériodique**



NB: La période et la pseudo période sont considérés souvent é gales

$$T \approx T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$$

Courbe de la tension du condensateur (Régime pseudo périodique)



- La résistance est le dipôle qui influe sur l'amplitude des oscillations
- Dissipation (perte) progressivement de l'énergie (initialement emmagasinée dans le condensateur) en énergie thermique par effet joule dans les résistances.
- L'amortissement est d'autant plus important que la résistance est élevée

Transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine

$$E_T = E_e + E_m$$

Montrons que l'énergie ne fait que diminuer

- 1- Exprimer le tout avec U_c (énergie emmagasinée seule)

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Circuit RLC (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

2- Dériver

3- Utiliser l'équation différentielle

$$= \frac{1}{2} C. U_C^2 + \frac{1}{2} L. i^2$$

$$\frac{dE_T}{dt} = C. \frac{dU_C}{dt} \left(U_C + L. C. \frac{d^2 U_C}{dt^2} \right)$$

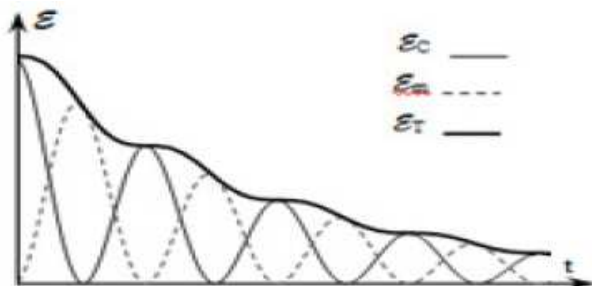
Or d'après l'équation différentielle on a

$$U_C + L. C. \frac{d^2 U_C}{dt^2} = - R. C. \frac{dU_C}{dt}$$

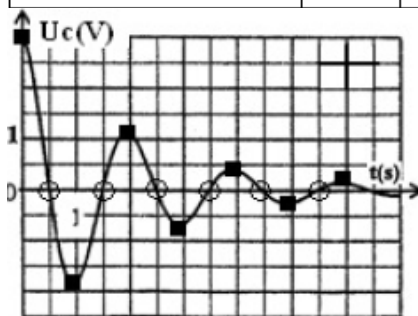
On trouve

$$\frac{dE_T}{dt} = - R. i^2 < 0$$

L'énergie d'un circuit RLC ne fait que diminuer



Points spécifiques sur la figure	U_C	i	E_e	E_m	E_T
■	U_{Cm}	0	$E_e = \frac{1}{2} C. U_{Cmax}^2$	0	$E_T = \frac{1}{2} C. U_{Cmax}^2$
○	0	I_m	0	$E_m = \frac{1}{2} L. I_{max}^2$	$E_T = \frac{1}{2} L. I_{max}^2$



Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Circuit RLC (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Devoir 1

A – Étude d'un condensateur

1. Un générateur idéal de tension constante notée E alimente un condensateur de capacité C en série avec un conducteur ohmique de résistance R .

Le condensateur étant initialement déchargé, on souhaite visualiser, à l'aide d'un oscilloscope numérique, la tension aux bornes du générateur sur la voie A et la tension aux bornes du condensateur sur la voie B, lors de la fermeture du circuit.

Compléter le schéma du montage (**figure 1 de l'annexe à rendre avec la copie**) en représentant les symboles des deux dipôles (condensateur et conducteur ohmique) et les flèches des tensions visualisées sur chacune des voies.

2. L'écran de l'oscilloscope est représenté sur la **figure 2 de l'annexe**. Les réglages de l'oscilloscope sont les suivants :

sensibilité verticale : 2 V/div ;
base de temps : 0,5 ms/div.

- a) A quelle voie de l'oscilloscope correspond chacune des deux courbes ? Justifier .
- b) Déterminer, à l'aide de l'oscillogramme, la valeur de la tension E délivrée par le générateur .
- c) Donner l'expression de la constante de temps τ du dipôle (R , C). Montrer que τ a la dimension d'un temps.
- d) Déterminer à l'aide de l'oscillogramme de la figure 2 la valeur de τ en expliquant la méthode utilisée.

B – Étude de l'association d'un condensateur et d'une bobine

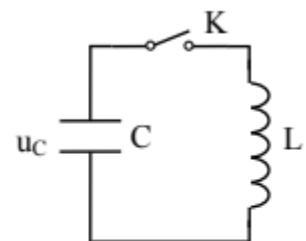
On réalise maintenant le montage schématisé ci-contre .

Le condensateur de capacité C est initialement chargé.

La tension à ses bornes est égale à 5,0 V.

La bobine d'inductance L a une résistance négligeable.

Ainsi on considère que la résistance totale du circuit est négligeable.



1. Établir l'équation différentielle que vérifie la tension u_C aux bornes du condensateur après la fermeture de l'interrupteur K .
2. On rappelle que la période propre d'un dipôle (L , C) est $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.
Pour le dipôle étudié, la valeur calculée est $T_0 = 4,0 \times 10^{-3}$ s.

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Circuit RLC (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Un ordinateur muni d'une carte d'acquisition permet de visualiser l'évolution de la tension aux bornes du condensateur u_C . Le début de l'enregistrement est synchronisé avec la fermeture de l'interrupteur ($t = 0$).

- Représenter, sur la **figure 3 de l'annexe à rendre avec la copie**, l'allure de la tension observée sur l'écran.
- On remplace le condensateur par un autre de capacité $C' = 4 C$, en conservant la même bobine.

Exprimer la nouvelle période propre T_0' en fonction uniquement de T_0 .

- Donner les expressions des énergies emmagasinées par le condensateur et par la bobine.
Laquelle de ces deux énergies est nulle à $t = 0$? Justifier.
A quelle date, l'autre énergie sera-t-elle nulle pour la première fois ?

3. En réalité, la résistance totale du circuit est faible mais pas négligeable.

- Quelle conséquence cela a-t-il d'un point de vue énergétique ? Justifier.
- Comment qualifie-t-on ce régime ?

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

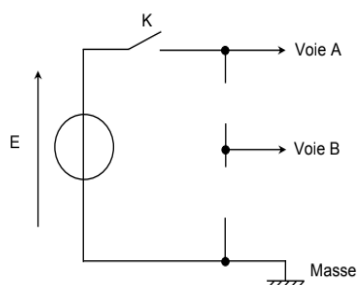


Figure 1

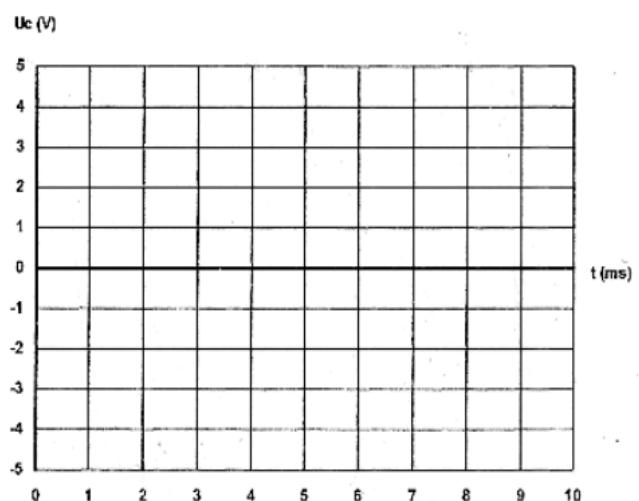
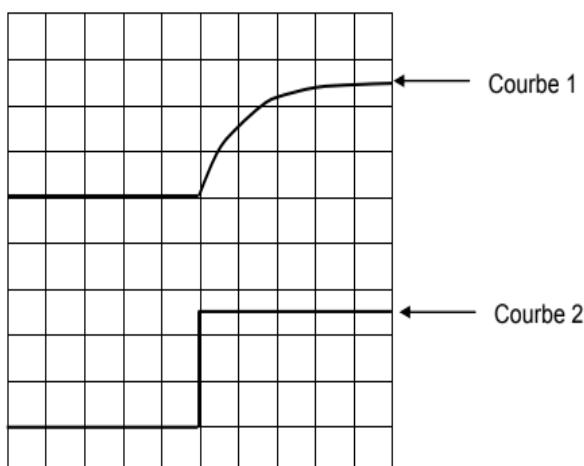


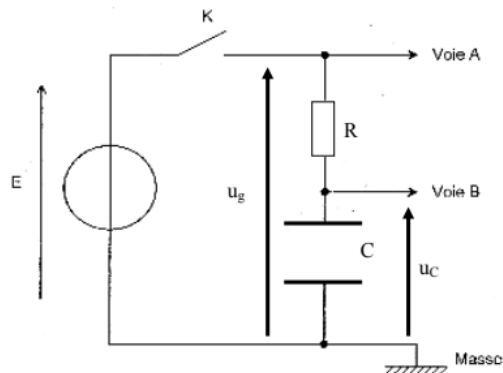
Figure 3

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Circuit RLC (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Correction devoir 1

A – Étude d'un condensateur

A.1.



A.2.a) Quand on ferme l'interrupteur la tension u_R passe instantanément de 0 à E volts, elle est donc représentée par la courbe 2. La courbe 2 correspond à la voie A.

Le condensateur ne se charge pas instantanément: u_C augmente exponentiellement puis tend vers une tension constante lorsque la charge est terminée. La courbe 1 correspond à la voie B.

A.2.b) E correspond à 2,5 divisions sur l'écran, soit $E = 2,5 \times 2 = 5V$

A.3.c) $\tau = R \times C$

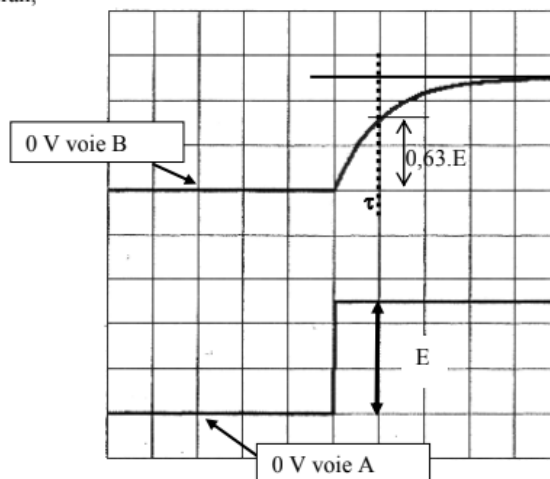
$[\tau] = [R] \times [C]$

Or $U = R \times I$ (loi d'Ohm) et $U = \frac{Q}{C}$

D'autre part $I = \frac{Q}{\Delta t}$

Il vient : $[\tau] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[Q]}{[I]} = [T]$

τ est bien homogène à un temps.



A.3.d) La méthode de la tangente est peu précise.

Pour $t = \tau$ alors $u_C(\tau) = 0,63.E$ soit $u_C(\tau) = 0,63 \times 5,0 = 3,15 V$, à l'écran environ 1,6 div.

D'autre part, pour $t = 5 \tau$, on peut considérer que la tension aux bornes du condensateur est égale à celle aux bornes du générateur.

5τ représentées par 5 div, donc τ correspond à une division.

$\tau = 0,5 ms$

B – Étude de l'association d'un condensateur et d'une bobine

B.1) D'après la loi d'additivité des tensions, on a : $u_C + u_L = 0$

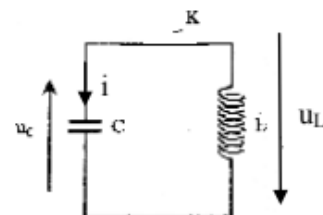
$$u_C + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$\text{Or } i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$$

$$u_C + L.C. \frac{d^2 u_C}{dt^2} = 0$$

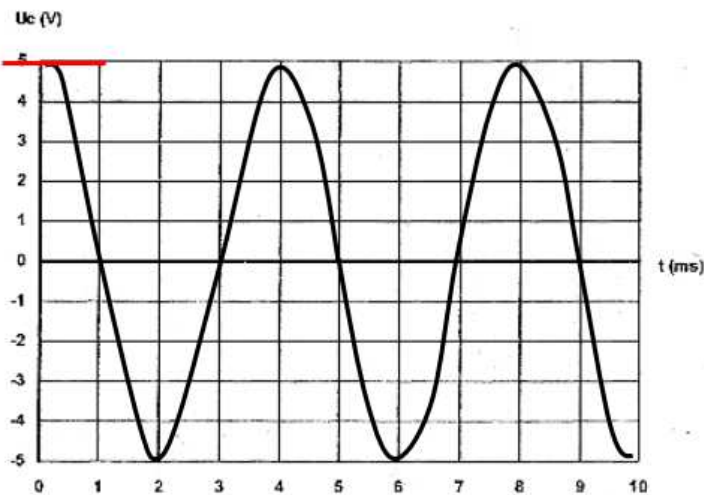
Soit l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$



Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Circuit RLC (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

B.2.a) Les oscillations sont sinusoïdales et non amorties (résistance totale du circuit négligeable)



$$\text{B.2.b)} T_0 = 2\pi \sqrt{LC} = 2\pi \sqrt{4LC} = 2 \times 2\pi \sqrt{LC} = 2 \times T_0$$

B.2.c) Énergie emmagasinée dans le condensateur : $E_C = \frac{1}{2} C \times u_C^2$
Énergie emmagasinée dans la bobine : $E_L = \frac{1}{2} L \times i^2$

À la date $t = 0$ s, le condensateur est chargé, donc $i = 0$, l'énergie emmagasinée dans la bobine est nulle.

OU $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$, et $\frac{du_C}{dt}$ est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de $u_C = f(t)$. Or à $t = 0$ s, cette tangente est horizontale (voir schéma ci-dessus: —).

La tension aux bornes du condensateur s'annule au bout d'une durée égale à $T_0/4 = 1$ ms, ce qui correspond à une énergie emmagasinée dans le condensateur nulle.

B.3.a) La résistance totale du circuit n'étant pas négligeable, il y a **dissipation d'énergie** sous forme de chaleur en raison de l'**effet Joule**.

B.3.b) C'est le **régime pseudo-périodique**. On observe un amortissement des oscillations électriques, l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur (et aux bornes de la bobine) diminue au cours du temps.