

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dénombrement (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

1-Les ensembles

Un ensemble qu'on peut dénombrer ses éléments est dit un ensemble fini on note le nombre de ses éléments par : $\text{Card}(E)=n$

Propositions à retenir

- 1- $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$
- 2- $A \cup B = B \cup A$
- 3- $A \cap B = B \cap A$
- 4- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 5- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 6- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 7- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Complémentaire d'un ensemble

Le complémentaire de A dans E est l'ensemble $\{x \mid x \in E \text{ et } x \notin A\}$. On le note $\complement_E A$ ou $E \setminus A$ ou encore lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E , ${}^c A$, A^c ou $\overline{A}$.

Propriétés du complémentaire (Lois de De Morgan) -

Soient E un ensemble, A, B, C des sous-ensembles de E .

- 1) $\complement_E(\complement_E A) = A$
- 2) $A \subset B$ si et seulement si $(\complement_E B) \subset (\complement_E A)$
- 3) $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
- 4) $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

Différence de deux ensembles

1 - $A \setminus B$ l'ensemble $\{x \in A \mid x \notin B\}$ et on l'appelle différence de A et B .

2 - $A \Delta B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et on l'appelle différence symétrique de A et B .

- La différence symétrique correspond au 'ou' exclusif : $A \Delta B$ est l'ensemble des points qui appartiennent à A ou à B , mais PAS à A et B en même temps.

C'est une réunion plutôt qu'une soustraction !!

Application 1

Soient A et B et C trois ensembles finis.

$E \Delta F$ est la réunion des éléments de E qui ne sont pas dans F et ceux de F qui ne sont pas dans E

1) Calculer $\text{card}(A - B)$ et $\text{card}(A \Delta B)$ en fonction de $\text{card}(A)$ et $\text{card}(B)$ et $\text{card}(A \cap B)$

Solution

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A \text{ et } (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

$$\text{Donc : } \text{card}(A - B) = \text{card}A - \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{card}(A \Delta B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - 2\text{card}(A \cap B)$$

Application 2

Dans un lycée de 100 élèves, 53 pratiquent le football et 15 le football et basket-ball et 20 pratiquent seulement basket-ball sans football

- 1) Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent le basket-ball ?
- 2) Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent au moins un sport ?
- 3) Quelle est Le nombre d'élèves qui ne pratiquent pas Les deux sports ?

Solution

$$1) \text{card}(B) = \text{card}(B \cap F) + \text{card}(B \cap \overline{F})$$

$$\text{Donc : } \text{card}(B) = 13 + 20 = 33$$

2) l'ensemble des élèves qui pratiquent au moins un sport est $F \cup B$

$$\text{card}(F \cup B) = \text{card}F + \text{card}B - \text{card}(F \cap B)$$

$$\text{card}(F \cup B) = 53 + 33 - 13 = 73$$

$$3) \overline{F \cup B} = \Omega - (F \cup B)$$

$$\text{Card}(\overline{F \cup B}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}[\Omega \cap (F \cup B)]$$

$$= \text{card}(\Omega) - \text{card}[(\Omega \cap F) \cup (\Omega \cap B)]$$

$$= \text{card}(\Omega) - \text{card}(F \cup B) = 100 - 73$$

2- Théorème fondamental du dénombrement

Si un événement C_1 peut se produire de n_1 façons différentes

Si un événement C_2 peut se produire de n_2 façons différentes

...

Si un événement C_p peut se produire de n_p façons différentes

Alors : Le total n des possibilités de l'événement combiné $C_1, C_2, \dots, C_p$

est le produit des possibilités de chaque événement.

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \dots \times n_p$$

Application 3

Une classe de 15 garçons et 12 filles. Il faut un garçon et une fille pour représenter la classe. Combien de possibilités de choix ?

Solution :

15 possibilités pour choisir un garçon, et 12 possibilités pour choisir la fille.

Il y a $15 \times 12 = 180$ possibilités.

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dénombrement (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Proposition

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}A \times \text{card}B$$

Application 4

Combien de menus peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 5 plats et 4 desserts ?

Solution :

On a ici 3 sous-expériences : le choix de l'entrée, puis le choix du plat et enfin le choix du dessert.

D'après le principe multiplicatif on aura donc $3 \times 5 \times 4$ menus possibles, c'est-à-dire 60.

3- Arrangement

Soit E un ensemble fini de cardinal n

Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E

C'est-à-dire : un élément de la forme : $(x_1; x_2; \dots; x_p) \in E \times E \times \dots \times E = E^p$

L'ordre des éléments importe

Arrangement avec répétitions

Un arrangement avec répétitions de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E non nécessairement distincts

On utilise également le terme de p-liste d'éléments de E

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments de E est égal à n^p

NB : c'est toujours le nombre d'états possibles de la variable puissance le nombre de variables disponibles

Application 5

Combien de numéros de téléphone à 8 chiffres peut-on former ?

Solution :

Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements avec répétitions puisque l'ordre des chiffres importe et qu'un numéro de téléphone peut comporter plusieurs fois le même chiffre.

$E = \{0, 1, \dots, 9\}$, et on a alors $n = \text{card}(E) = 10$
On s'intéresse aux arrangements avec répétitions de $p = 8$ éléments de E .
D'après le résultat ci-dessus, il y en a 10^8

Arrangement sans répétitions

Un arrangement sans répétitions de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E tous distincts.

Dans ce cas on a nécessairement $P \leq n$ puisque les répétitions sont interdites.
Le nombre d'arrangements sans répétitions de p éléments de E se note :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

Application 6

Quel est le nombre de mots comportant 5 lettres distinctes ? (Sans se préoccuper du sens des mots)

Solution :

Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements sans répétitions puisque l'ordre des lettres importe et que l'on requiert qu'elles soient distinctes.
 E est constitué des lettres de l'alphabet,
 $E = \{a, b, \dots, z\}$, et on a alors $n = \text{card}(E) = 26$

On s'intéresse aux arrangements sans répétitions de $p=5$ éléments de E .
D'après le résultat ci-dessus, il y en a :

$$A_{26}^5 = 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7893600$$

Application 7

Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9.

- 1) On tire 3 boules de l'urne Successivement avec remise et on construit un nombre de trois chiffres Quel est le nombre de nombres possibles ?
- 2) On tire 3 boules de l'urne Successivement sans remise quel est le nombre de nombres possibles ?

Solution :

Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements avec répétitions (Successivement avec remise)
il y en a donc : $9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$

2) Il s'agit d'une situation d'arrangements sans répétitions (Successivement sans remise)

il y en a donc : $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

4-Permutation (arrangement avec $n=p$)

Arrangement sans répétitions

Une permutation des éléments de E est une liste ordonnée d'éléments de E sans répétitions et le nombre de permutations d'un ensemble fini E à n éléments est le nombre $n!$ (factorielle n) défini par ...

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

Application 8

De combien de façons pouvez-vous ranger 10 livres sur une étagère ?

Réponse : $10! = 3628800$

Arrangement avec répétitions

Si on a n objets parmi lesquels on a k collections de termes semblables : n_1 sont identiques et n_2 autres sont semblables et ainsi de suite jusqu'aux n_k qui sont également semblables....

Alors la formule générale devient ...

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Application 9

Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot : « excellence » ?

Réponse : $\frac{10!}{4! \times 1! \times 2! \times 2! \times 1!} = 37800$

Car e se répète 4 fois et x une fois et c deux fois L
deux fois et n une fois

5-Combinaison (l'ordre n'ai pas important)

On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble fini E de n éléments, tout sous-ensemble A de p éléments de E .

Remarque : « combinaison » est donc synonyme de sous-ensemble ou "partie".

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments est le nombre que l'on note par :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_n^0 = 1 ; C_n^1 = n ; C_n^n = 1$$

Application 10

Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7.

On tire 2 boules de l'urne simultanément

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair ?
3. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair ?

Solution

Il s'agit clairement d'une situation de combinaisons puisque chaque tirage est une permutation de 2 éléments dans un ensemble de 7 éléments (simultanément) donc le nombre de tirages possibles est :

$$C_7^2 = \frac{A_7^2}{2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

2) pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair il suffit de tirer 2

boules pairs **ou** tirer 2 boules impairs Donc : le nombre est :

$$C_4^2 + C_3^2 = \frac{A_4^2}{2!} + \frac{A_3^2}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} + \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 6 + 3 = 9$$

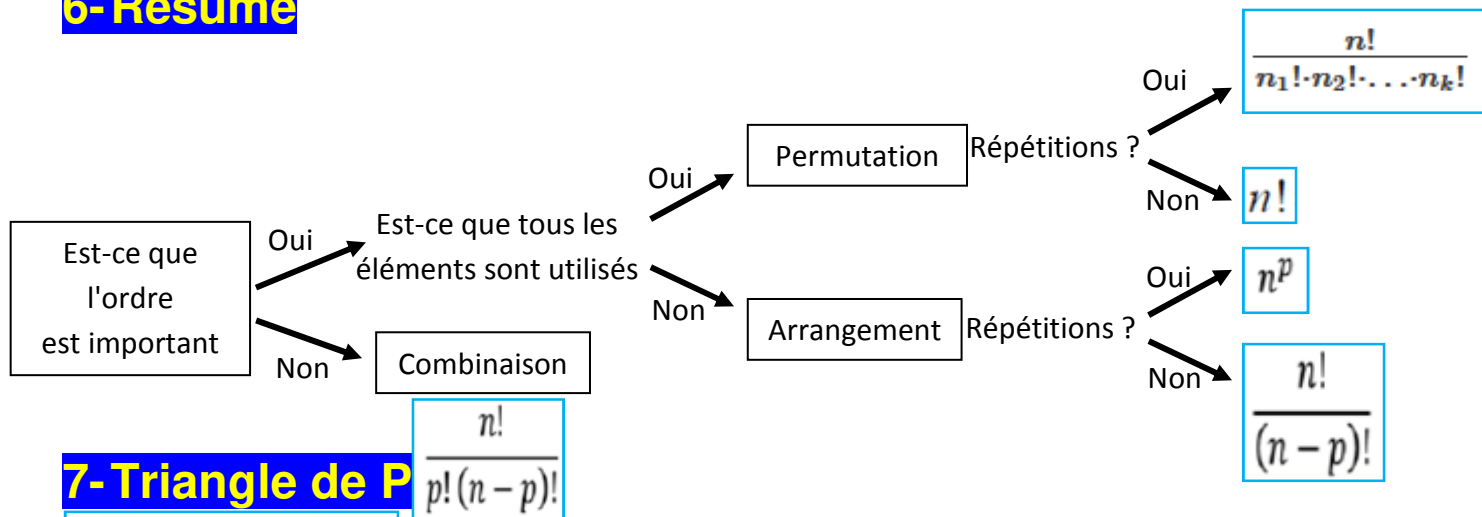
Car il ya 3boules pairs et 4boules impairs

3) pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair il suffit de tirer une boules pairs **et** tirer une boules impairs :

$$\text{Donc : le nombre est : } C_4^1 \times C_3^1 = 4 \times 3 = 12$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dénombrement (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

6-Résumé



7-Triangle de P

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

Ce triangle permet de trouver les coefficients binomiaux dans la formule du binôme de Newton.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$$

Application 11

A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr...) ?

Solution

Un tel podium est un arrangement de 3 athlètes choisis parmi l'ensemble des 18 athlètes (l'ordre compte et il ne peut y avoir de répétition, un athlète ne pouvant

remporter deux médailles simultanément). Il existe donc :

$$A_{18}^3 = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = 18 \times 17 \times 16 = 4896$$

Application 12

Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.

- 1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?
- 2) Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.

3) Même question si chaque fille est intercalée entre deux garçons.

4) Même question si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre

Solution

- 1) Il s'agit d'une permutation d'un ensemble de 6 éléments donc il y a donc $6! = 720$ possibilités.
- 2) Il y a deux possibilités, soit elles se mettent à gauche ou à droite, les deux configurations sont similaires, pour la gauche, la première fille à 2 possibilités, la deuxième a une possibilité, le premier garçon aura 4 possibilités, le deuxième 3, le troisième 2 et le dernier 1. Donc pour la gauche on a $2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilités soit 48 donc pour la gauche et la droite on aura 48×2 possibilités c'est-à-dire 96 possibilités.
- 3) Il y 3 configurations possibles ...FGGFGG + GFGGFG + GGFGGF pour chacune il y a 48 possibilités donc au total il y a 48×3 possibilités soit 144
- 4) FFGGG + GFFGGG + GGFFGG + GGGFFG + GGGGFF chaque configuration à 48 possibilités donc au total on a $48 \times 5 = 240$

Application 13

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les probabilités :

a) De ne tirer que 3 jetons verts ;

b) De ne tirer aucun jeton vert

c) De tirer au plus 2 jetons verts ;

d) De tirer exactement 1 jeton vert.

2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

Solution

1) Tirages successifs sans remise de 3 jetons parmi 9. Il y a $A_9^3 = 504$ possibilités

a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ». On a $p(A) = \frac{A_5^3}{A_9^3} = \frac{5}{42}$

b) Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a $p(B) = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{1}{21}$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »

1^{ère} méthode : $p(C) = p(A) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$

2^{ème} méthode

$$p(C) = \frac{\overbrace{A_4^3}^{\text{Ne tirer aucun vert}} + \overbrace{3 \times A_5^1 \times A_4^2}^{\substack{\text{Tirer exactement 1 vert :} \\ \text{- choix de la place du jeton vert} \\ \text{- choix d'1 vert et de 2 rouges}}} + \overbrace{3 \times A_5^2 \times A_4^1}^{\text{Tirer exactement 2 verts}}}{A_9^3} = \frac{37}{42}$$

d) Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert ». $p(D) = \frac{3 \times A_5^2 \times A_4^1}{A_9^3} = \frac{5}{14}$

2) Tirages simultanés de 3 jetons parmi 9. Il y a $C_9^3 = 84$ possibilités

a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ». On a $p(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42}$

b) Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a $p(B) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »

1^{ère} méthode : $p(C) = p(A) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$

2^{ème} méthode

$$p(C) = \overbrace{C_4^3}^{\text{Ne tirer aucun vert}} + \overbrace{C_5^1 \times C_4^2}^{\substack{\text{Tirer exactement 1 vert :} \\ \text{- choix de la place du jeton vert} \\ \text{- choix d'1 vert et de 2 rouges}}} + \overbrace{C_5^2 \times C_4^1}^{\text{Tirer exactement 2 verts}} = \frac{37}{42}$$

d) Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert ». $p(D) = \frac{C_5^2 \times C_4^1}{C_9^3} = \frac{5}{14}$