

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation et étude des fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Dérivation et étude des fonctions

I. Rappels

Exercice1 :

1- Montrer en utilisant la définition que la fonction

$f(x) = x^2 + x - 3$ est dérivable en $a = -2$.

2) soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \dots x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} \dots x < 1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; x \geq 0 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

Solution :

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 3 + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} x - 1 = -3 = f'(-2)$$

Donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = -3$

on a $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2 - 1^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} = f'_d(1)$$

Donc f est dérivable à droite en 1

3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à droite de 0

On dit que f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x + 1 = 1 = f'_g(0)$$

1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de 0

On dit que f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{4}(x+1) = \frac{1}{2} = f'_g(1)$$

Donc f est dérivable à gauche en 1

et on a : $f'_d(1) = f'_g(1)$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x + 3 = 3 = f'_d(0)$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation et étude des fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Exercice 2: soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \dots 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3-x} \dots x > 1 \end{cases}$$

- 1) déterminer le domaine de définition de f
- 2) étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$ et donner une interprétation géométrique du résultat
- 3) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique

Indication => cherchez à utiliser l'expression conjuguée pour les limites en un point

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0$ et $0 \leq x \leq 1$

ou $x^3-x \geq 0$ et $x > 1$

$x \in D_f \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ ou $x > 1$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in [0; +\infty[$ donc : $D_f = [0; +\infty[$

2) étude de la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$

On a : $f(0) = 1$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}-1}{x} = \frac{x\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}-1}{x} \\ &= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{x(\sqrt{1-x^2}+1)} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}+1} \end{aligned}$$

3) a) étude de la dérivabilité de f à gauche en

$x_0 = 1$ On a : $f(1) = 0$ soit $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \frac{(1+x)(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} -(1+x)^2 = -4$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 1$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 = f'_d(0)$$

Donc f est dérivable à droite en 0

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en

$A(0, 1)$ de coefficient directeur $1 = f'_d(0)$

b) soit $x > 1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^3-x}-0}{x-1} = \frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^3-x}} = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}$$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^3-x} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2+x = 2$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en

$A(1, 0)$ parallèle à l'axe des ordonnées dirigé vers le haut

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre a . On dit que f est dérivable en a si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe et est finie}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation et étude des fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Propriété : Soit f une fonction dérivable en a . f admet une fonction affine tangente en a de la forme : $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$

Propriété : Toute fonction dérivable en a est continue en a .

II- fonction dérivée et opérations sur les dérivées

1) Dérivabilité sur un intervalle.

Définition : Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est Df , a et b deux éléments de Df tels que : $a < b$

- 1) On dit que f est dérivable sur l'ouvert $]a, b[$ si elle est dérivable en tout point de $]a, b[$
- 2) On dit que f est dérivable sur le semi-ouvert $[a, b[$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite de a
- 3) On dit que f est dérivable sur le fermé $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite de a et à gauche de b

2) fonction dérivée

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I . La fonction qui associe à tout

élément x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de la fonction f sur I .

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation et étude des fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

3) fonctions dérivées usuelles (à apprendre par cœur)

La fonction f	Sa fonction dérivée f'	Intervalles de dérivation
C	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^{*+}$ et $\mathbb{R}^{*-}$
$\cos$	$-\sin$	$\mathbb{R}$
$\sin$	$\cos$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

4) opérations sur les fonctions dérivées

La fonction	Sa fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + g' \cdot f$
$\frac{1}{g}$	$\frac{-g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f(ax + b)$	$af'(ax + b)$

Exercice 3

Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

- 1) $f(x) = x^2 + 3x - 1$
- 2) $f(x) = 4 \sin x$
- 3) $f(x) = x^4 \cos x$
- 4) $f(x) = \sqrt{x} + x^3$
- 5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- 6) $f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1}$
- 7) $f(x) = \frac{4x - 3}{2x - 1}$
- 8) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
- 9) $f(x) = (2x + 3)^5$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation et étude des fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Solution : 1) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ $D_f = \mathbb{R}$

f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x^2)' + (3x - 1)' = 2x + 3$$

$$2) f(x) = 4 \sin x \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 4u(x) \text{ avec } u(x) = \sin x$$

Puisque u est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4(u(x))' = 4 \cos x$$

$$4) f(x) = \sqrt{x} + x^3 \quad D_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$$

$$f(x) = u(x) + v(x) \text{ avec } u(x) = \sqrt{x} \text{ et } v(x) = x^3$$

Puisque u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et v est dérivable en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = (u(x))' + (v(x))' = \frac{2}{2\sqrt{x}} + 3x^2$$

$$6) f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1} \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{ -1; \frac{1}{4} \right\}$$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -1; \frac{1}{4} \right\}$

$$7) f(x) = \frac{4x - 3}{2x - 1} \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

$$f(x) = u(x)/v(x) \text{ avec } u(x) = 4x - 3 \text{ et } v(x) = 2x - 1$$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(4x - 3)'}{(2x - 1)} = \frac{(4x - 3)'(2x - 1) - (4x - 3)(2x - 1)'}{(2x - 1)^2} = \frac{4(2x - 1) - 2 \times (4x - 3)}{(2x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x - 1) - 2 \times (4x - 3)}{(2x - 1)^2} = \frac{8x - 4 - 8x + 6}{(2x - 1)^2} = \frac{2}{(2x - 1)^2}$$

$$3) f(x) = x^4 \cos x \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = u(x) \times v(x) \text{ avec } u(x) = x^4 \text{ et } v(x) = \cos x$$

Puisque u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

On utilise la formule : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((x^4) \times (\cos x))' = (x^4)' \times (\cos x) + (x^4) \times (\cos x)'$$

$$f'(x) = 4x^3 \times (\cos x) - x^4 \times \sin x = 4x^3 \cos x - x^4 \sin x$$

$$5) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad D_f = \mathbb{R}^{++} =]0; +\infty[$$

$$\text{On a : } f(x) = \frac{1}{u(x)} \text{ avec } u(x) = \sqrt{x}$$

Puisque u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\text{est on a : } f(x) = \frac{6}{u(x)} \text{ avec } u(x) = 4x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x) = 6 \left(\frac{1}{u(x)} \right)' = 6 \left(-\frac{u'}{u^2} \right) = -6 \frac{(4x^2 + 3x - 1)'}{(4x^2 + 3x - 1)^2} - 6 \frac{8x + 3}{(4x^2 + 3x - 1)^2}$$

$$8) f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad : D_f =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$$

$$\text{On a : } f(x) = \sqrt{u(x)} \text{ avec } u(x) = x^2 - 4$$

$$\text{Et on a : } u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{-2; 2\}$$

Donc f est dérivable sur $D_f - \{-2; 2\}$

$$\forall x \in D_f - \{-2; 2\} :$$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 - 4})' = \frac{(x^2 - 4)'}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation et étude des fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

$$9) f(x) = (2x+3)^5 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = (u(x))^5 \quad \text{avec } u(x) = 2x+3$$

On utilise la formule : $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$

$$f'(x) = ((2x+3)^5)' = 5 \times (2x+3)^{5-1} \times (2x+3)' = 5 \times 2 \times (2x+3)^4 = 10(2x+3)^4$$

III- Dérivation de la composition de fonctions

Théorème : Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telles que $f(I) \subset J$ et a un élément de I .

1) Si f est dérivable en a et g dérivable en $b = f(a)$ alors $(g \circ f)$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$

2) Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J alors $(g \circ f)$ est dérivable sur I et pour tout a dans I on a : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$

Démonstration => écrire $(g \circ f)'(a)$ divisez et multipliez par $f(x) - f(a)$

Exercice 4

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes

$$1) f(x) = \sin(2x^2 - 1)$$

$$2) f(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2 + 2}\right)$$

$$3) f(x) = \tan \cos(x)$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation et étude des fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

IV- Dérivation de la fonction réciproque

Théorème : Soient f une fonction continue strictement monotone sur I , et $J = f(I)$ et a un élément de I

1) Si f est dérivable en y_0 et $f'(y_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $x_0 = f(y_0)$

$$\text{Et : } (f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

2) Si f est dérivable I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(\forall x \in J) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Démonstration

On suppose que f est dérivable sur I et que $(\forall y \in I)(f'(y) \neq 0)$

Montrons que f^{-1} est dérivable sur J

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} \quad (\text{car } (\forall y \in I)(f'(y) \neq 0)) \\ &= \lim_{x \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} \quad (\text{car quand } x \text{ tend vers } x_0) \end{aligned}$$

on a: $y = f^{-1}(x)$ tend vers $f^{-1}(x_0)$

$$= \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Exercice 5

soit f une fonction définie sur

$$I =]-\pi; \pi[\text{ par : } \begin{cases} f(x) = 2 \frac{\cos x - 1}{\sin x}; \text{ si } 0 < x < \pi \\ f(x) = \frac{x|x+1|}{x-1}; \text{ si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation et étude des fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

1)monter que f est dérivable en $x_0 = 0$

et donner l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0 = 0$

2)a)étudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$

b)donner les équations des demies tangentes à a la courbe de f en en $x_0 = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Solution : 1)étude de la dérivabilité de f à droite

en $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\cos x - 1}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2 \times \frac{1}{2} \times 1 = -1 = f'_d(0)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et $f'_d(0) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x+1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1 = f'_g(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 0$ et

$$f'_g(0) = -1$$

Et puisque : $f'_d(0) = f'_g(0)$

Donc f est dérivable à en $x_0 = 0$ et $f'(0) = -1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une tangent en $O(0, 0)$.de

coefficient directeur $f'(0) = -1$

l'équation de la tangente a la courbe de f en

$$x_0 = 0 \text{ est : } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$y = 0 - 1(x - 0) \Leftrightarrow (T) : y = -x$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x - 1} = \frac{1}{2} = f'_d(-1)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = -1$ et $f'_d(-1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x}{x - 1} = -\frac{1}{2} = f'_g(-1)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = -1$ et

$$f'_g(-1) = -\frac{1}{2} \text{ mais on a : } f'_d(-1) \neq f'_g(-1)$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en $A(-1, 0)$.

b) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = -1$ est :

$$y = f(-1) + f'_d(-1)(x + 1) \text{ avec } x \geq -1$$

$$y = 0 + \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow (T_d) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ avec } x \geq -1$$

l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = -1$ est :

$$y = f(-1) + f'_g(-1)(x + 1) \text{ avec } x \leq -1$$

$$y = 0 - \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow (T_g) : y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ avec } x \leq -1$$