Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les équations différentielles (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Equations différentielles

I- Rappels et définitions

Définition :

Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une ou plusieurs fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.
L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Exemples:

1) L'équation différentielle : $y' = e^{2x}$ a pour solution

les fonctions primitives de la fonction :

$x \to e^{2x}$ qui sont : $x \to \frac{1}{2}e^{2x} + c$

2) $y' + 5y = 0$:est une équation différentielle de

$1er$ ordre sans second membre.

(Sans second membre car à droite = 0)

3) $y' - 8y = 2x - 1$ est une équation différentielle de

$1er$ ordre avec second membre.

4) $y'' - 3y' + 5y = e^{2x}$: est une équation

différentielle de 2éme ordre avec second membre.

II- **y' = ay** (a est un réel)

$(\forall x \in \mathbb{R})(y'(x) = ay(x)) \iff (\forall x \in \mathbb{R})\ (y'(x)/y(x) = a)$

$\iff (\forall x \in \mathbb{R})(l\ n|y(x)| = ax + c)$

$\iff (\forall\ x \in \mathbb{R})(|y(x)| = \exp(ax+c)$

$\iff (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) = \pm \exp(ax+c)$ où $c \in \mathbb{R}$

$\iff (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) = \lambda \exp(ax)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les équations différentielles (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Propriété : Soit a un réel non nul.
(E) $y' = ay$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$
La solution générale de l'équation différentielle (E)

est l'ensemble des fonctions : $x \to y(x) = \lambda e^{ax}$

Où λ est un réel.

Exemple : Résoudre les équations différentielles suivantes :1) (E_1): $y' = 3y$ 2) (E_2): $y' - y = 0$

Solution : 1) La solution générale de l'équation différentielle (E_1): est l'ensemble des fonctions :
$x \to y(x) = \lambda e^{3x}$ où λ est un réel.

2) (E_2): $y' - y = 0 \Leftrightarrow (E_2)$: $y' = 1y$
La solution générale de l'équation différentielle
(E_2): est l'ensemble des fonctions : $x \to y(x) = \lambda e^{x}$
où λ est un réel.

III- y'=ay+b ($a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.)

Soient a un réel non nul, b un réel quelconque,
Considérons l'équation différentielle :
(E) $y' = ay + b$

$$(E) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\left(y'(x) = a\left(y(x) + \frac{b}{a}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\left(y(x) + \frac{b}{a}\right)' = a\left(y(x) + \frac{b}{a}\right)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(z'(x) = az(x)) \quad \text{où } z(x) = y(x) + \frac{b}{a}$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\left(y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax}\right)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\left(y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}\right)$$

Propriété : Soit a un réel non nul et b un réel
(E) $y' = ay + b$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ .La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions :
$x \to y(x) = \lambda e^{x} - \dfrac{b}{a}$ où λ est un réel.

Remarque : Le réel λ dans la solution générale de l'équation différentielle (E) peut-être déterminé par les conditions initiales

Exemple1 : Résoudre l'équations différentielle suivante : $(E):2y'-4y-3=0$

Solution : $(E):2y'-4y-3=0 \Leftrightarrow 2y'=4y+3$

$\Leftrightarrow y'=\frac{4y+3}{2} \Leftrightarrow y'=2y+\frac{3}{2}$

on a donc ; $a=2$ et $b=\frac{3}{2}$

La solution générale de l'équation différentielle (E): est l'ensemble des fonctions :

$x \mapsto \lambda e^{2x}-\frac{3}{4}$ où λ est un réel.

Exemple2 : soit l'équations différentielle suivante : $(E):\frac{1}{2}y'+3y-1=0$

1) Résoudre l'équation différentielle (E)

2) Déterminer la solution f de (E) Telle que $f'(0)=-2$.

Solution : 1) $(E):\frac{1}{2}y'+3y-1=0 \Leftrightarrow y'=-6y+2$

Donc : $a=-6$ et $b=2$

La solution générale de l'équation différentielle (E): est l'ensemble des fonctions :

$x \mapsto \lambda e^{-6x}+3$ Où λ est un réel.

2) $f(x)=\lambda e^{-6x}+3$ On va calculer : $f'(x)$

$f'(x)=\left(\lambda e^{-6x}+3\right)'=-6\lambda e^{-6x}$

$f'(0)=-2 \Leftrightarrow -6\lambda e^{0}=-2 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{3}$

Donc : $f(x)=\frac{1}{3}e^{-6x}+3$ c'est la solution de (E) qui vérifie la condition initiale

IV- ay''+by'+cy=0

a un réel non nul et b et c sont des réels quelconques.

$$ar^2+br+c=0$$

cette équation s'appelle l'équation caractéristiques de l'équation différentielle

L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ est dite à coefficients constants car a, b *et* c sont des réels donnés.
On Supposera $a \neq 0$
(sinon, l'équation est du premier ordre).

Linéarité

L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ possède la propriété suivante : Si y_1 et y_2 sont deux fonctions solutions de l'équation : $ay'' + by' + cy = 0$, alors, pour tous nombres A et B, la fonction $Ay_1 + By_2$ est aussi une solution.

Résolution

Par analogie avec une équation du premier ordre, on cherche une solution de la forme :

$$\boxed{y(x) = e^{rx}}$$

r est un nombre complexe

$$y'(x) = re^{rx} \quad y''(x) = r^2e^{rx}$$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

La résolution de cette l'équation permet donc de trouver des solutions (a priori à valeurs complexes). De plus, lorsque l'on connaît deux solutions y_1 et y_2 de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$, on en connaît une famille car toutes les Fonctions $Ay_1 + By_2$
Avec A et B complexes, sont aussi solutions.

Théorème : Soit l'équation différentielle :

(E) $ay'' + by' + cy = 0$

Et soit (E_1): $ar^2 + br + c = 0$ son équation Caractéristique.
$\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E_1)

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les équations différentielles (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

1) Si Δ > 0 l'équation (E_1) a deux racines : r_1 et r_2 réelles et distinctes et les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où A et B réels

2) Si Δ < 0 l'équation (E_1) a deux racines z_1 et z_2 complexes conjugués et si : $z_1 = p + qi$ alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $y(x) = e^{px}\left(A\cos qx + B\sin qx\right)$ où A et B réels

3) Si Δ = 0 l'équation (E_1) admet une racine double r et les solutions de (E) sont les fonctions: $y(x) = \left(Ax + B\right)e^{rx}$ Où A et B sont des réels.

Exemple1 :1) Résoudre l'équations différentielle suivante : $(E): y'' - 7y' + 12y = 0$

2) Déterminer la solution f de (E)

Telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Solution :1) l'équation Caractéristique de (E) est :

(E_1): $r^2 - 7r + 12 = 0$

On a : $\Delta = 1$ donc l'équation (E_1) a deux racines : r_1 et r_2 réelles et distinctes : $r_1 = 3$ et $r_2 = 4$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{3x}$ où α et β réels

2) $f(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{3x}$

$f'(x) = \left(\alpha e^{4x} + \beta e^{3x}\right)' = 4\alpha e^{4x} + 3\beta e^{3x}$

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ 4\alpha - 3\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

Donc : $f(x) = e^{4x} - e^{3x}$ c'est la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales

Exemple2 : 1) Résoudre l'équations différentielle suivante : $(E): y'' - 2y' + y = 0$

2) Déterminer la solution f de (E)

Telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Solution :1) l'équation Caractéristique de (E) est :

(E_1): $r^2 - 2r + 1 = 0$

On a : $\Delta = 0$ donc l'équation (E_1) admet une racine double $r_0 = \frac{-b}{2a} = 1$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(x) = (\alpha x + \beta)e^x$ où α et β réels

2) $f(x) = (\alpha x + \beta)e^x$

$f'(x) = ((\alpha x + \beta)e^x)' = ((\alpha x + \beta))' e^x + (\alpha x + \beta)(e^x)'$

$f'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x$

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

Donc : $f(x) = (1x + 0)e^x$ donc : $f(x) = xe^x$

C'est la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales.

Exercice : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' = 7y - 5$ avec $y(0) = -6$

2) $y'' - 15y' + 56y = 0$ avec : $y'(0) = 9$; $y(0) = -3$

3) $y'' + 14y' + 49y = 0$ avec : $y'(0) = 6$; $y(0) = -3$

4) $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$ avec : $y'(0) = 6$; $y(0) = -4$

Solutions : 1) $y' = 7y - 5$ Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$y(x) = \lambda e^{7x} + \frac{5}{7}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

On a : $y(0) = \lambda + \frac{5}{7} = -6$ donc : $\lambda = -\frac{47}{7}$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est : $\boxed{y(x) = -\frac{47}{7}e^{7x} + \frac{5}{7}}$

2) $y''-15y'+56y=0$ **avec :** $y'(0)=9$; $y(0)=-3$

l'équation Caractéristique de l'équation est :

$r^2-15y+56=0$ donc : $r_1=7$ **et** $r_2=8$

Donc : $y(x)=\alpha e^{7x}+\beta e^{8x}$ où α et β réels

Donc : $y'(x)=7\alpha e^{7x}+8e^{8x}$

$$\begin{cases} y(0)=\alpha+\beta \\ y'(0)=7\alpha+8\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0)=-3 \\ y'(0)=9 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} \alpha+\beta=-3 \\ 7\alpha+8\beta=9 \end{cases}$ donc : $\beta=30$; $\alpha=-33$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est : $\boxed{y(x)=-33e^{7x}+30e^{8x}}$

3) $y''+14y'+49y=0$ **avec :** $y'(0)=6$; $y(0)=-3$

l'équation Caractéristique de l'équation est :

$r^2+14y+49=0$ donc : $r=-7$

Les solutions : $\left((\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)$ $y(x)=(\alpha x+\beta)e^{-7x}$

$y'(x)=\alpha e^{-7x}-7(\alpha x+\beta)e^{-7x}$

$$\begin{cases} y(0)=-3 \\ y'(0)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0)=\beta \\ y'(0)=\alpha-7\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-3 \\ \alpha-7\beta=6 \end{cases}$$

Donc : $\alpha=-15$; $\beta=-3$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est $\boxed{y(x)=(-15x-3)e^{-7x}}$

4) $y''+y'+\frac{5}{2}y=0$ **avec :** $y'(0)=6$; $y(0)=-4$

l'équation Caractéristique de l'équation est :

$r^2+y+\frac{5}{2}=0$ on trouve : $z=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ et $\bar{z}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

Donc : $\left((\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)$ $y(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\left(\alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+\beta\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$

où α et β réels

$$y'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(\alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+\beta\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)+\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\alpha\sin\left(\frac{3}{2}x\right)+\beta\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$

$$\begin{cases} y(0)=-4 \\ y'(0)=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y(0)=\alpha \\ y'(0)=-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-4 \\ -\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}\beta=6 \end{cases}$$

Donc : $\alpha=-4$; $\beta=\frac{8}{3}$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est

$$\boxed{y(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+\frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)}$$