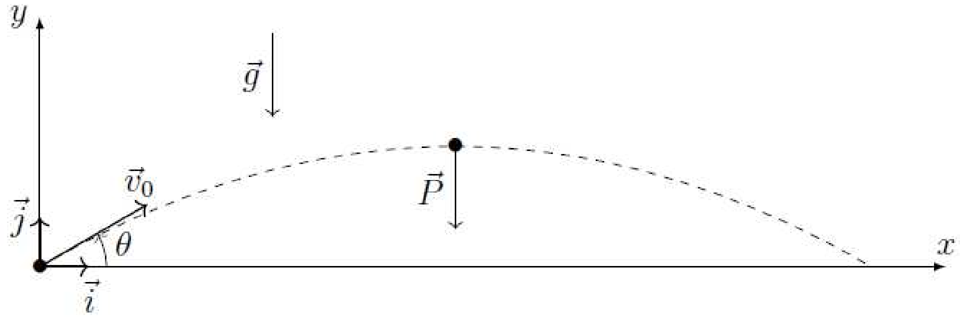
Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Mouvements plans (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1ère et 2ème Bac International SM

1- Projectile dans un champ de pesanteur uniforme :

On lance un projectile de masse m d'un point O à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ qui fait une angle α avec l'horizontale. On considère le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ confondu avec le plan où le projectile est en mouvement, il est supposé galiléen.
Les conditions initiales : à $t = 0$ on a : $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$.



$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} &= v_0 \cos\theta \\ v_{0y} &= v_0 \sin\theta \end{cases}$$

Les équations horaires

Le système étudié est {Le projectile}.
Le bilan des forces : Le projectile est soumis à son poids uniquement $\vec{P}$.
D'après la deuxième loi de Newton on a :

$$\vec{P} = m\vec{a} \qquad \vec{g} = \vec{a}$$

Projetons cette relation sur les axes

$$\begin{cases} a_x &= 0 \\ a_y &= -g \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -g \end{cases} \quad \begin{cases} v_x &= v_{0x} \\ v_y &= -gt + v_{0y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= v_0 \cos(\theta).t + x_0 \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta).t + y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x &= v_0 t \cos\theta \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} v_x &= v_0 \cos\theta \\ v_y &= -gt + v_0 \sin\theta \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} x &= v_0 t \cos\theta \\ y &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases}}$$

Étude de la trajectoire

$$\boxed{y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + x \tan\theta}$$

Elle est obtenue en posant $t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$.

Les caractéristiques du mouvement

1- La flèche

C'est l'altitude maximale $h$max atteinte par le projectile.
Soit S le point correspondant sur la trajectoire et situé dans le sommet de la trajectoire. On a $v_{yS} = 0$, c'est-à-dire :

$$-gt + v_0 \sin\theta = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

En remplaçant dans les expressions de x et y, on trouve

$$x_S = v_0 \cos\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{2g}$$

$$\frac{\sin(2\theta)}{2} = \sin\theta \cos\theta.$$

$$\begin{aligned} y_S &= -\frac{g}{2} \times \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + v_0 \sin\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} \\ &= -\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \\ &= h_{\max} \end{aligned}$$

2- La portée horizontale

C'est l'abscisse x_P du point P de la trajectoire d'ordonnée nulle, c'est-à-dire situé sur l'axe (Ox), autrement dit $y_S = 0$, on obtient :

$$-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x_P^2 + x_P\tan\theta = 0$$

C'est une équation qui donne deux solutions, dans notre cas, la première solution est x_0 qui correspond au point du lancement O.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_P + x_0 = \frac{2v_0^2\cos^2\theta\tan\theta}{g}$$

$$x_P = \frac{2v_0^2\cos\theta\sin\theta}{g}$$

$$= \frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}$$

$$\boxed{d = \frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}}$$

3- La vitesse du centre d'inertie du projectile

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \qquad \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

$$v_x = v_0\cos\theta \qquad \text{et} \qquad v_y = -gt + v_0\sin\theta$$

Au point S le sommet on a $\mathbf{v}_y = 0$ donc

$$\boxed{v_S = \sqrt{v_x^2} = v_0\cos\theta}$$

2- Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme :

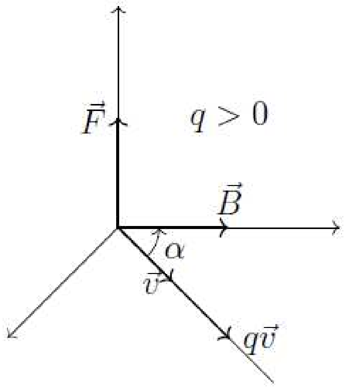
Le champ magnétique $\vec{B}$ est une grandeur vectorielle, $\vec{B}$ est caractérisée par, **sa direction**, **son sens et sa norme** mesurée en **Tesla (T).**
la présence du champ magnétique implique l'existence d'une force agissante sur la particule chargée, de charge q et se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel donnée.

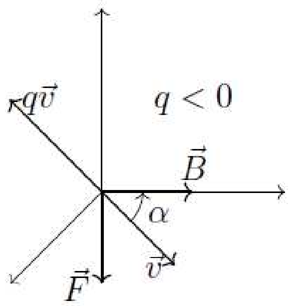
Une charge électrique "q" animée de la vitesse "v" dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$
Subit une force

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Relation de Lorentz

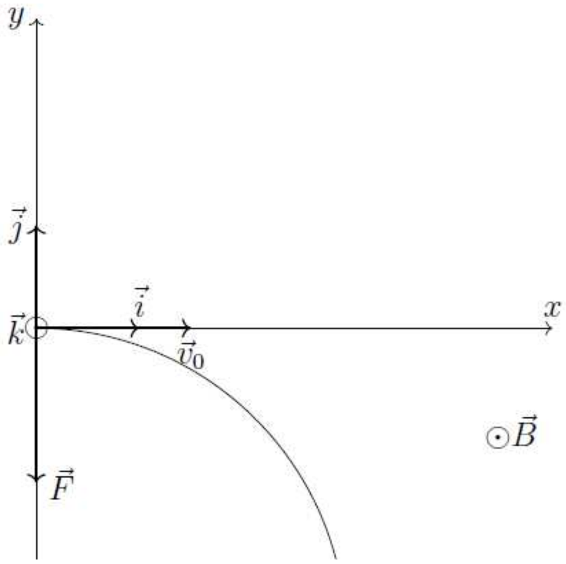
Direction : $\vec{F}$ est orthogonale à la fois à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$.
Sens : Le trièdre $(q\vec{v}; \vec{B}; \vec{F})$ est direct.
Intensité : $F = |q \sin\alpha| vB$.





==Cas particulier== ($\overrightarrow{B}$ est uniforme et perpendiculaire à la direction de $\overrightarrow{v_0}$)

le mouvement de la particule dans le référentiel supposé galiléen, on choisit le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $\quad \vec{B} = B\vec{k}$ et $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$.
La particule pénètre dans le champ en O à la date t = o.



$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Multiplions les membres de cette équation scalairement par $\vec{k}$:

$$\vec{a}.\vec{k} = \left(\frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{k}$$

Or, $\vec{B}$ est colinéaire à $\vec{k}$, donc :

$$\vec{a}.\vec{k} = 0$$

Par suite, on déduit les équations suivantes

$$\begin{cases} \ddot{z} & = 0 \\ \dot{z} & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}$$

La coordonnée z étant toujours nulle, le mouvement de la particule a lieu dans le plan (xOy) orthogonal à $\vec{B}$, La particule a une trajectoire curviligne

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B} \qquad \vec{a} = 0.\vec{u} + \frac{|q|}{m}vB.\vec{n}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & = 0 \\ \dfrac{v^2}{\rho} & = \dfrac{|q|}{m}vB \end{cases} \iff \begin{cases} v = v_0 & = \mathrm{C^{te}} \\ \rho = \dfrac{mv_0}{|q|B} & = \mathrm{C^{te}} \end{cases}$$

$$R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

Ce qui montre que le mouvement est uniforme, et circulaire

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{v_0}{R}} = \frac{2\pi R}{v_0} \quad \boxed{T = \frac{2\pi m}{|q|B}}$$

La période ne dépend pas de v_0.

La puissance :

La puissance *P* est le produit scalaire de la vitesse et la force. Or la force magnétique est perpendiculaire à $\vec{v}$, alors

$$\mathscr{P} = \vec{F}.\vec{v} = F.v.\cos(\pi/2) = 0$$

la force magnétique ne travaille pas.

$$\boxed{\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv_0^2}$$

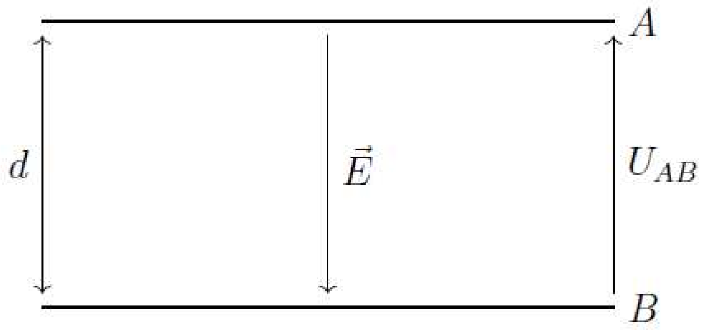
Le champ magnétique ne varie pas l'énergie cinétique de la particule chargée

3- Particule chargée dans un champ électrique uniforme

Un champ électrique, est un champ crée par des particules chargées, souvent fixes dans le référentiel d'étude, $\vec{E}$
est caractérisé par : Sa direction, son sens et sa norme mesurée en V/m
On distingue deux cas :

- Si la charge est **positive** le champ est **centrifuge**,
- Si elle **négative** alors le champ est **centripète.**

On s'intéressera aux champs crées par les plaques appliquées entre eux une tension U et séparés par une distance d.

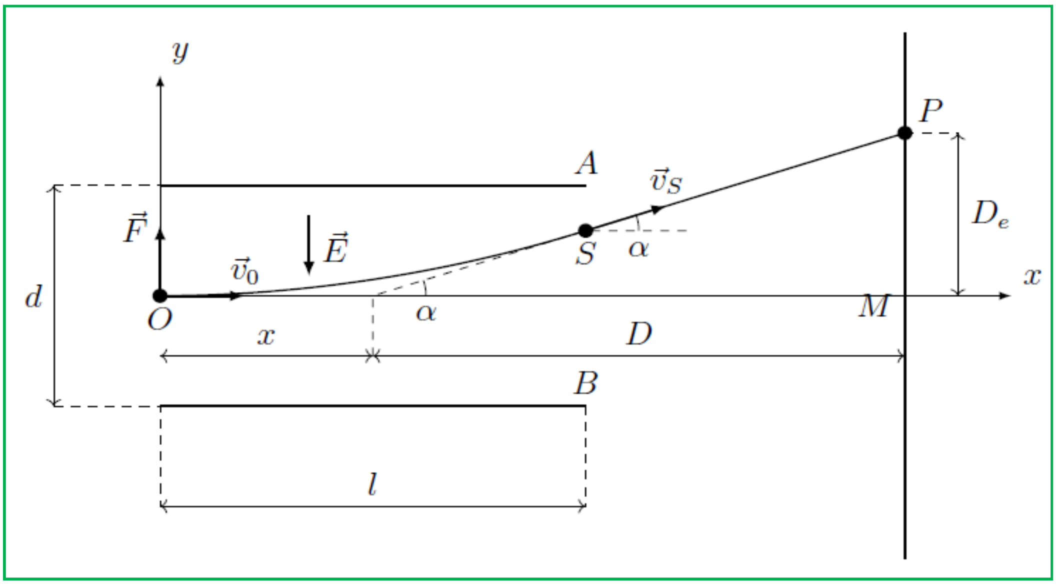


Direction : Perpendiculaire aux plaques.
Sens : De la plaque ayant le grand potentiel vers celle ayant le potentiel petit
Intensité : $E = \dfrac{U}{d}$

Toute charge q placée dans une région de l'espace dominée par un champ électrique $\vec{E}$ est soumise à une force électrique (force de Coulomb)

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad F = |q|E$$

Si $q > 0$, alors $\vec{F}$ a le même sens de $\vec{E}$.
Si $q < 0$, alors $\vec{F}$ a le sens inverse de $\vec{E}$



Les équations

Le système étudié : { L'électron }

Les forces appliquées sur le système : $\vec{F}$ La force électrique.

Dans un repère considérée galiléen, on applique la 2ème loi de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x &= 0 \\ a_y &= \dfrac{|q|}{m}E \end{cases} \quad \vec{v}\begin{cases} v_x &= v_0 \\ v_y &= \dfrac{|q|}{m}Et \end{cases} \quad \overrightarrow{OM}\begin{cases} x &= v_0 t \\ y &= \dfrac{|q|}{2m}Et^2 \end{cases}$$

Le mouvement de la particule est rectiligne uniforme selon l'axe (Ox), alors qu'il est rectiligne uniformément varié selon l'axe (Oy).

L'équation du trajectoire est obtenue Par élimination du temps entre x et y on trouve

$$y = \frac{|q|E}{2mv_0^2}x^2$$

La trajectoire est donc une parabole

La sortie

C'est le point S indiquée sur la figure. Il correspond au point où l'électron quitte le champ $\vec{E}$.

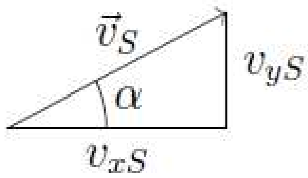
On $x_S = l$, en la remplaçant dans l'équation du trajectoire on obtient : $y_S = \dfrac{|q|El^2}{2mv_0^2}$.

$$\boxed{S\begin{cases} x_S &= l \\ y_S &= \dfrac{|q|El^2}{2mv_0^2} \end{cases}}$$

La vitesse à la sortie

On sait qu'à S on a $t_S = l/v_0$, c'est la période nécessaire pour que la particule atteint S.

$$\vec{v}_S\begin{cases} v_{xS} &= v_0 \\ v_{yS} &= \dfrac{|q|El}{mv_0} \end{cases}$$



$$\tan\alpha = \frac{v_{yS}}{v_{xS}} = \frac{|q|El}{mv_0^2}$$

La déviation électrique

Après sa sortie, la particule n'est plus soumise à la force électrique, elle continue donc son mouvement jusqu'à son arrivée à un point P, on remarque une distance importante De, c'est la distance qui sépare P du point d'impact M, si $\vec{E}$ était absent

$$\tan\alpha = \frac{D_e}{D} = \frac{y_S}{x} \Longleftrightarrow D_e = \frac{y_S D}{x}$$

Calculons x :

$$\tan\alpha = \frac{|q|El}{mv_0^2} \qquad x = \frac{y_S}{\tan\alpha} \qquad x = \frac{|q|l^2E}{2mv_0^2} \times \frac{mv_0^2}{|q|El} \qquad = \frac{l}{2}$$

$$D_e = \frac{|q|El}{2mv_0^2}\frac{2}{l}D \qquad = \frac{|q|U}{dmv_0^2}D$$

$$\boxed{D_e = \frac{|q|D}{dmv_0^2}U}$$

4- Applications

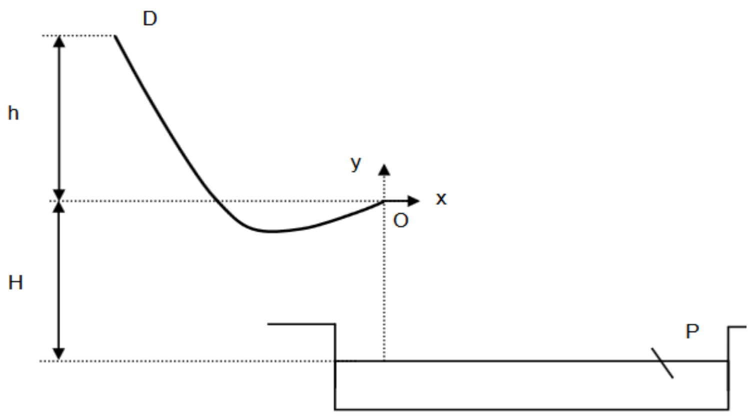
Exercice

Un enfant glisse le long d'un toboggan de plage dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Pour l'exercice, l'enfant sera assimilé à un point matériel G et on négligera tout type de frottement ainsi que toutes les actions dues à l'air.

Un toboggan de plage est constitué par :

- une piste *DO* qui permet à un enfant partant de *D* **sans vitesse initiale** d'atteindre le point *O* avec un vecteur vitesse $\vec{V_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale ;

- une piscine de réception : la surface de l'eau se trouve à une distance *H* au dessous de *O*.



- Masse de l'enfant : $m = 35$ kg ;
- Intensité de la pesanteur : $g = 10$ m.s^{-2}
- Dénivellation $h = 5{,}0$ m ;
- Hauteur $H = 0{,}50$ m ;
- Angle $\alpha = 30°$;

Étude de la chute de l'enfant dans l'eau

En O, origine du mouvement dans cette partie, on prendra $\boldsymbol{v_0}$ **= 5,0 m.s**$^{-1}$.

1. Énoncer la deuxième loi de Newton.

2. Appliquer la deuxième loi de Newton à l'enfant une fois qu'il a quitté le point O.

3. Déterminer l'expression des composantes $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération dans le repère *Oxy*.

4. Déterminer l'expression des composantes $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse dans le repère *Oxy*

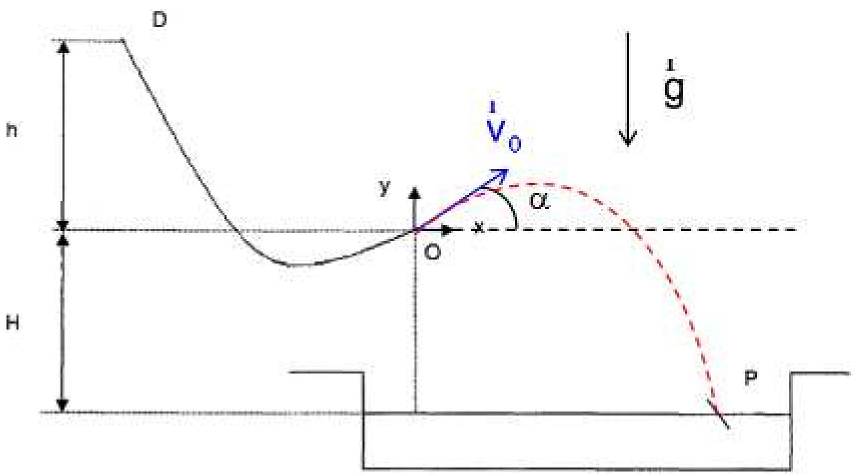
5. Déterminer l'expression des composantes $x(t)$ et $y(t)$ du vecteur position dans le repère *Oxy*.

6. Montrer que l'expression de la trajectoire de l'enfant notée $y(x)$ a pour expression :

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 . \cos^2 \alpha} + x.\tan\alpha$$

7. En déduire la valeur de l'abscisse x_P du point d'impact P de l'enfant dans l'eau.

Correction Exercice



forces extérieures $\sum \vec{F}_{ext}$ appliquée à un système de masse m est égale à la masse du système multipliée par le vecteur accélération $\vec{a}$ de son centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

2.2. L'enfant de masse *m* est modélisé par un point matériel G, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'enfant n'est soumis qu'à son poids : ainsi la deuxième loi de Newton appliquée à l'enfant une fois qu'il a quitté le point O donne : $\vec{P} = m.\vec{a}$

$$\Leftrightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow .\vec{g} = \vec{a}$$

$$\boxed{\vec{a}\,(t)\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases}} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \begin{matrix} a_x(t) = 0 = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y(t) = -g = \dfrac{dv_y}{dt} \end{matrix}$$

$$\text{par intégration } \vec{v}\,(t)\begin{cases} v_x(t) = Cte_1 \\ v_y(t) = -g.t + Cte_2 \end{cases} \qquad \vec{v}_0\begin{cases} v_x(0) = Cte_1 = v_0.\cos\alpha \\ v_y(0) = Cte_2 = v_0.\sin\alpha \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v}\,(t)\begin{cases} v_x(t) = v_0.\cos\alpha \\ v_y(t) = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{cases}}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \qquad \begin{matrix} v_x(t) = v_0.\cos\alpha = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y(t) = -g.t + v_0.\sin\alpha = \dfrac{dy}{dt} \end{matrix}$$

$$\text{par intégration : } \overrightarrow{OG}\,(t)\begin{cases} x(t) = v_0.\cos\alpha.t + Cte_1' \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + Cte_2' \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OG}\,(0)\begin{cases} x(0) = Cte_1' = 0 \\ y(0) = Cte_2' = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG}\,(t)\begin{cases} x(t) = v_0.\cos\alpha.t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t \end{cases}}$$

On isole le temps t dans $x(t) = v_0.\cos\alpha.t$ et on reporte t dans y(t)

$t = \dfrac{x}{v_0.\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = -\dfrac{1}{2}.g.\dfrac{x^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + x.\tan\alpha}$

2.7. Il faut résoudre l'équation : $y(x_P) = -H$ car pour $x = x_P$, $y = -H$

donc : $-\dfrac{1}{2}.g.\dfrac{x_P^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + x_P.\tan\alpha = -H$

Calculons les termes devant x_P^2 et x_P :

$$-\frac{1}{2}.\frac{g}{v_0^2.\cos^2\alpha} = -\frac{1}{2}\times\frac{10}{5{,}0^2\times\cos^2(30)} = -0{,}27\ m^{-1}$$

$\tan\alpha = \tan(30) = 0{,}58$

Il faut résoudre l'équation, avec H = 0,50 m : $-0{,}27.x^2_P + 0{,}58.x_P = -0{,}50$

Soit l'équation du second degré : $-0{,}27.x^2_P + 0{,}58.x_P + 0{,}50 = 0$

$\Delta = (0{,}58)^2 - 4\times(-0{,}27)\times 0{,}50 = 0{,}88 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{0{,}88} = 0{,}94$

$x_P = \dfrac{(-0{,}58 + 0{,}94)}{2\times(-0{,}27)} = -0{,}54\ m \qquad x_P = \dfrac{(-0{,}58 - 0{,}94)}{2\times(-0{,}27)} = 2{,}8\ m$

Or x_P est positif , x_P = **2,8 m**