

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction exponentielle (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Fonction exponentielle

I) LA FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1) Définition et propriétés

La fonction $\ln$ est continue strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $\ln(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Propriété et définition :

La fonction $\ln$ admet une fonction réciproque définie de $] - \infty, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$ appelée fonction Exponentielle népérienne notée : $\exp$

Propriétés :

- 1) $(\forall x \in \mathbb{R})(\ln(\exp(x)) = x)$
- 2) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\exp(\ln(x)) = x)$
- 3) $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R})(\ln(x) = y \Leftrightarrow x = \exp(y))$
- 4) $\exp(0) = 1$; $\exp(1) = e$

Propriété : (monotonie) : La fonction $\exp$ est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Résultat :

- 1) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y)$
- 2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exp(x) \leq \exp(y) \Leftrightarrow x \leq y)$

Exemple : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$1) \exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad 2) \exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right)$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction exponentielle (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Solution :1) $\ln(x-2)=0$

a) cette équation est définie ssi : $2x+3 \neq 0$ et

$x-1 \neq 0$ donc : $x \neq -\frac{3}{2}$ et $x \neq 1$ donc : $D_E = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}$

b) Résoudre l'équation :

$$\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \Leftrightarrow \frac{x+5}{2x+3} = \frac{1}{x-1}$$

$$(x+5)(x-1) = 2x+3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-8) \times 1 = 4 + 32 = 36 > 0$$

$$x_1 = \frac{-2+6}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-2-6}{2 \times 1} = \frac{-8}{2} = -4$$

Donc : $S = \{-4; 2\}$

$$2) \exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right)$$

a) cette inéquation est définie ssi : $x \neq 0$ donc : $D_I = \mathbb{R}^*$

$$2) \exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right) \Leftrightarrow 2x+1 \leq \frac{6}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + x - 6}{x} \leq 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$3/2$	$+\infty$	
$2x+x-6$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$q(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

$$S =]-\infty, -2] \cup \left]0, \frac{3}{2}\right]$$

2) l'écriture : e^x

$$\exp(x) = e^x$$

Propriété algébrique :

Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$ on a :

$$1) e^{x+y} = e^x \times e^y \quad 2) e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad 3) e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$4) e^{rx} = (e^x)^r \quad (r \in \mathbb{Q}) \quad 5) (e^{\ln x} = x) \quad (\forall x > 0)$$

$$6) (\ln(e^x) = x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$7) (\forall y > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) (e^x = y) \Leftrightarrow (x = \ln y)$$

$$8) (\forall y > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) (e^x = e^y) \Leftrightarrow (x = y)$$

$$9) (\forall y > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) (e^x \geq e^y) \Leftrightarrow (x \geq y)$$

Exemples : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$1) e^{1-x} \times e^{2x} = e \quad 2) \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1}$$

Solution :1) $e^{1-x} \times e^{2x} = e \Leftrightarrow e^{2x+1-x} = e^1$

$$\Leftrightarrow e^{x+1} = e^1 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0 \text{ donc : } S = \{0\}$$

$$2) \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \Leftrightarrow e^{(2-x)-(1+2x)} = e^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (2-x)-(1+2x) = x-1 \Leftrightarrow -4x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction exponentielle (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Propriété : (limites usuelles)

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$
- 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ avec : $n \in \mathbb{N}^*$

Exemple : Déterminer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 4}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^{-\sqrt{-x}}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$

Solution : 1) $\frac{e^x}{x^2 + 3x + 4} = \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{e^x}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}$

Et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} = 1$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 4} = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^{-\sqrt{-x}}$ on pose : $t = \sqrt{-x}$

donc $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^{-\sqrt{-x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t^{10} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t^{10}}{e^t} = 0$

3) on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} = 1 \times 1 = 1$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = 1$ (on pose : $t = \sin x$) et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

4) On pose : $f(x) = e^{x+1}$ donc : $f(0) = e^{0+1} = e^1 = e$

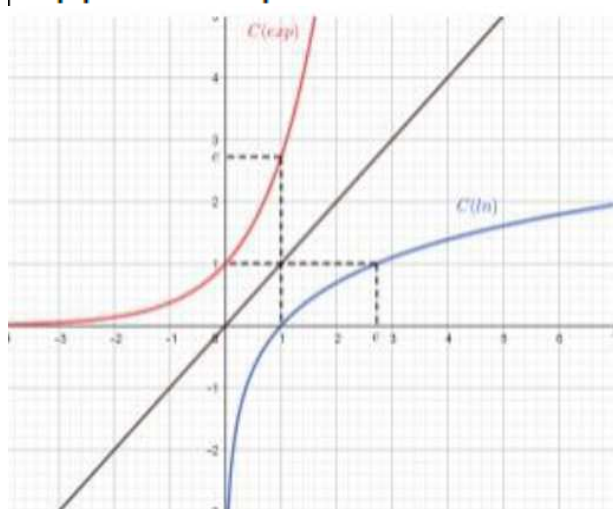
Et : $f'(x) = (x+1)' e^{x+1} = 1 e^{x+1} = e^{x+1}$ et $f'(0) = e$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = e$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction exponentielle (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

3) Représentation de la fonction *exp*

La fonction *exp* est strictement monotone sur $\mathbb{R}$
Car l'*exp* est la fonction réciproque de la fonction *ln* qui est strictement monotone sur $]0, +\infty[$
Les courbes $C_{\ln}$ et $C_{\exp}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ) : $y = x$



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp(x)$	0	1	e	$+\infty$

4) Dérivation de la fonction *exp*

On sait que la fonction *exp* est la fonction réciproque de la fonction *ln* qui est dérivable sur $]0, +\infty[$. Et on sait que : $(\forall x \in]0, +\infty[) (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Donc la fonction *exp* est dérivable sur $\mathbb{R} = \ln(]0, +\infty[)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\exp'(x) = (\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x)$$

$$\text{Car : } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ avec } f=\ln \text{ et } \ln^{-1}=\exp$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction exponentielle (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Propriété : La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $(\forall x \in \mathbb{R})(\exp'(x) = \exp(x))$

Corolaire : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $\exp(u(x))$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I)(\exp(u(x)))' = u'(x) \exp(u(x))$

Exemple : Déterminer les dérivées des fonctions

$$1) f(x) = e^{\sqrt{2x+1}} \quad 2) g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1}$$

$$3) h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}} \quad 4) f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$$

Solutions : 1) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$

la fonction : $u_1 : x \rightarrow \sqrt{2x+1}$ est dérivable sur

$$\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ et } u_1'(x) = \frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Donc la fonction f est dérivable sur

$$\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ et } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} e^{\sqrt{2x+1}}$$

2) $g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1}$ les fonctions:

$u_1 : x \rightarrow -2x^2$ et $u_2 : x \rightarrow 3x+1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$u_1'(x) = -4x \text{ et } u_2'(x) = 3$$

Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } g'(x) = -4xe^{-2x^2} - 9e^{3x+1}$$

$$3) h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}} \text{ la fonction : } u : x \rightarrow \frac{x+1}{-x+3}$$

$$\text{est dérivable sur }]3; +\infty[\text{ et }]-\infty; 3[\text{ et } u'(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$$

Donc la fonction f est dérivable sur $]3; +\infty[$ et

$$]-\infty; 3[\text{ et } h'(x) = \frac{4}{(x-3)^2} e^{\frac{x+1}{-x+3}}$$

$$4) f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$$

$$f'(x) = ((e^x - 4)\sqrt{e^x - 1})' = ((e^x - 4))' \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4)(\sqrt{e^x - 1})'$$

$$f'(x) = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{(e^x - 1)'}{2\sqrt{e^x - 1}} = e^x \sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4) \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

5) Primitives et la fonction $\exp$

Corolaire : Si u est une fonction dérivable alors une primitive de $u'(x) \cdot e^{u(x)}$ est $e^{u(x)}$.

Exemple : Déterminer les primitives des fonctions

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction exponentielle (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad g(x) = (e^x)^2$$

Solutions : 1) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ Si on pose : $u(x) = \sqrt{x}$

On a : $f(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$ si $x > 0$ donc

les primitives de f sont :

$$F(x) = 2e^{u(x)} + \lambda = 2e^{\sqrt{x}} + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2) $g(x) = (e^x)^2$ Si on pose : $u(x) = e^x$

On a : $g(x) = u'(x)u(x)$ donc les primitives de g

$$\text{sont : } G(x) = \frac{1}{2}u^2(x) + \lambda = \frac{1}{2}(e^x)^2 + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice1

Déterminer une primitive des fonctions suivantes

$$I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x} 2)$$

$$I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3$$

$$I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad I =]0; +\infty[$$

Solutions : 1) $I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

$$f(x) = 2e^{3x} - e^{-x} = \frac{2}{3}(3x)' e^{3x} + (-x)' e^{-x}$$

$$F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + e^{-x} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I$$

$$2) I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$\text{Donc : } F(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{2x} - 1} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I$$

$$4) I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$$

$$f(x) = \sin x e^{\cos x} = -(\cos x)' e^{\cos x}$$

$$\text{donc : } F(x) = e^{\cos x} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I$$

$$3) I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3$$

$$f(x) = e^x (e^x - 1)^3 = (e^x - 1)' (e^x - 1)^3$$

$$\text{donc : } F(x) = \frac{1}{3+1} (e^x - 1)^{3+1} = \frac{1}{4} (e^x - 1)^4 \text{ est une primitive de}$$

f sur I

$$5) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x} \quad I =]0; +\infty[$$

$$\text{donc : } F(x) = \ln|e^x - x| \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction exponentielle (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

6) Etudes des fonctions qui contiennent *exp*

Exemple1

$$f(x) = (x-1)e^x$$

- 1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 2) Etudier les branches infinies de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$
- 3) Etudier la concavité de la courbe C_f
- 4) Construire la courbe C_f .

$$f'(x) = ((x-1)e^x)' = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)'$$

$$f'(x) = 1e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de x

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0		$+\infty$

Le signe de : $f''(x)$ est celui de : $x+1$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+

Donc :

(C_f) est convexe sur $[-1; +\infty[$

(C_f) est concave sur $]-\infty; -1]$ et $A(-1, -2e^{-1})$ est un

point d'inflexion de (C_f)

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^x$$

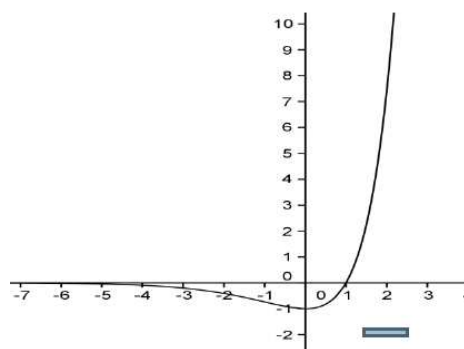
On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^x = 1 \times (+\infty) = +\infty$$

Donc : la courbe C_f admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) Etude de la concavité de la courbe C_f :

$$f''(x) = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x(1+x)$$



Exemple2

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction exponentielle (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

1)déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3)montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$

4) Etudier les branches infinies de la courbe C_f
Et étudier la position de la courbe C_f avec les asymptotes obliques

Solutions :

$$1) D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x + 1 \neq 0\}$$

$$e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1 \text{ pas de solutions car } e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 3$$

$$2) f'(x) = \left(x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} \right)' = 1 - 3 \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = 1 - 3 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)^2 - 3e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 + 2e^x + 1 - 3e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x)^2 - e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de : $(e^x)^2 - e^x + 1$

On pose : $e^x = X$ donc on a : $X^2 - X + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$$

Donc : $X^2 - X + 1 > 0$ (signe de a)

Donc : $(e^x)^2 - e^x + 1 > 0$ par suite: $f'(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3)montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1} = x + 2 - 3 + \frac{3}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{-3(e^x + 1) + 3}{e^x + 1} = x + 2 + \frac{-3e^x - 3 + 3}{e^x + 1}$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction exponentielle (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

4) Etude des branches infinies ?

a) On a $f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$ donc $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{e^x + 1}$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x + 1} = 0$

Donc : la courbe Cf est au-dessus de la droite d'équation $(\Delta)y = x - 1$

Par suite : la droite d'équation $(\Delta)y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe Cf au voisinage

b) On a $f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$ donc $f(x) - (x + 2) = -\frac{3e^x}{e^x + 1}$

de $+\infty$ et on a aussi : $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{e^x + 1} > 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3e^x}{e^x + 1} = 0$

Par suite : la droite d'équation $(D)y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe Cf au voisinage

de $-\infty$ et on a aussi : $f(x) - (x + 2) = -\frac{3e^x}{e^x + 1} < 0$

Donc : la courbe Cf est au-dessous de la droite d'équation $(D)y = x + 2$

II) LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a .

1) Définition et résultats

Propriété et définition : Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction $\log_a$ étant continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$, elle admet donc une fonction réciproque de

$$\mathbb{R} = \log_a (]0, +\infty[) \text{ vers }]0, +\infty[.$$

Cette fonction réciproque s'appelle la fonction exponentielle de base a et se note **$\exp_a$**

Propriété : Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \exp_a(x) = e^{x \ln a}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction exponentielle (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Résultats immédiats : Soit $a > 0$ et $a \neq 1$

fonction $\exp_a$ est définie sur $\mathbb{R}$

$$1) \forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) > 0$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$3) \forall x \in \mathbb{R} \quad \log_a(\exp_a(x)) = x$$

$$4) \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \exp_a(\log_a(x)) = x$$

Propriété caractéristique :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$$

Propriété : $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\exp_a(x))' = (\ln a) e^{x \ln a} = (\ln a) a^x$$

Monotonie et étude et représentation

Si $0 < a < 1$:

On a $\ln(a) < 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exp'_a(x) < 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'_a(x)$	-	-	-	-
$\exp_a(x)$	$+\infty$	1	a	0



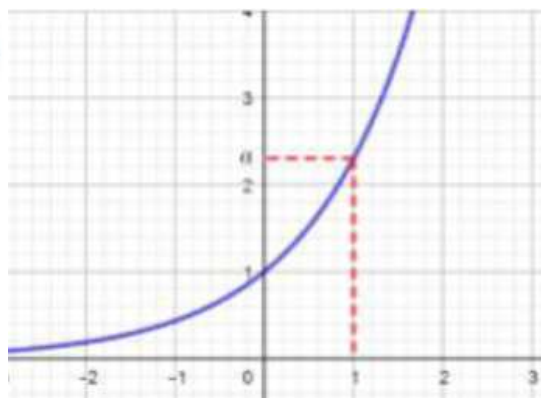
Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction exponentielle (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Si $0 < a < 1$:

On a $\ln(a) > 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exp'_a(x) > 0)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'_a(x)$	+	+	+	+
$\exp_a(x)$		1	a	$+\infty$



2) Une autre écriture de la fonction $\exp_a$

Puissances réelle : La notation a^x

Soit a un réel strictement positif.

1) Si $a = 1$, on pose pour tout réel $x > 0$: $1^x = 1$

2) Si $a \neq 1$, on pose $a^x = e^{x \ln a}$

Propriétés :

$(\forall a \in \mathbb{R}^{*+})(\forall b \in \mathbb{R}^{*+})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$

$$1) a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$2) (a \times b)^x = a^x \times b^x$$

$$3) (a^x)^y = a^{x \times y} \quad 4) a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad 5) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$6) (a^x)' = a^x \times \ln a$$

a) $x \rightarrow a^x$ est strictement croissante si $a > 1$

b) $x \rightarrow a^x$ est strictement décroissante si $0 < a < 1$

Exemples : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$1) 5^x = 15 \quad 2) 3^{2x} \geq 5^{1-x} \quad 3) 7^{x+1} - 7^{-x} < 6$$

Pensez au changement de variable $7^x = a$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction exponentielle (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Solution : 1) $5^x = 15$

$$5^x = 15 \Leftrightarrow e^{x \ln 5} = 15 \Leftrightarrow x \ln 5 = \ln 15 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 15}{\ln 5}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{\ln 15}{\ln 5} \right\} ..$$

$$2) 3^{2x} \geq 5^{1-x} \Leftrightarrow \ln(3^{2x}) \geq \ln(5^{1-x})$$

$$\Leftrightarrow 2x \ln 3 \geq (1-x) \ln 5 \Leftrightarrow x(2 \ln 3 + \ln 5) \geq \ln 5$$

$$\text{Donc : } S = \left[\frac{\ln 5}{2 \ln 3 + \ln 5}; +\infty \right[$$

$$3) 7^{x+1} - 7^{-x} < 6 \Leftrightarrow 7^{x+1} - \frac{1}{7^x} < 6 \quad \text{on a } 7^x > 0$$

$$7^{2x+1} - 1 < 6 \times 7^x \Leftrightarrow 7 \times (7^x)^2 - 6 \times 7^x - 1 < 0$$

$$\text{on pose : } t = 7^x \Leftrightarrow 7t^2 - 6t - 1 < 0$$

$$\text{on a : } 7t^2 - 6t - 1 = (t-1)(7t+1)$$

$$7^{x+1} - 7^{-x} < 6 \Leftrightarrow (7^x - 1)(7 \times 7^x + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (7^x - 1)(7^{x+1} + 1) < 0 \Leftrightarrow 7^x - 1 < 0 \quad \text{car } 7^{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 7^x < 1 \Leftrightarrow 7^x < 7^0 \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{car } x \rightarrow 7^x \text{ est}$$

$$\text{strictement croissante } (7 > 1) \text{ donc : } S =]-\infty; 0[$$

Exercice6 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$1) 2^{x+1} = 8^x \quad 2) 3^x = 12 \quad 4) 100^x + 40 = 14 \times 10^x$$

$$\text{Solution : } 1) 2^{x+1} = 8^x \Leftrightarrow 2^{x+1} = (2^3)^x \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{3x}$$

$$x+1 = 3x \Leftrightarrow 1 = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = x \quad \text{donc : } S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$2) 3^x = 12 \Leftrightarrow x = \log_3 12 \quad \text{donc : } S = \{\log_3 12\}$$

$$X_1 = \frac{14+6}{2 \times 1} \text{ et } X_2 = \frac{14-6}{2 \times 1} \quad \text{donc : } X_1 = 10 \text{ et } X_2 = 4$$

$$\text{Donc : } 10^{x_1} = 10 \text{ et } 10^{x_2} = 4 \quad \text{donc : } x_1 = 1 \text{ et}$$

$$x_2 = \log_{10} 4 \quad \text{Donc : } S = \{1, \log_{10} 4\}$$

$$4) 100^x + 40 = 14 \times 10^x \Leftrightarrow 10^{2x} - 14 \times 10^x + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (10^x)^2 - 14 \times 10^x + 40 = 0 \quad \text{on pose : } 10^x = X$$

$$\text{On a alors : } X^2 - 14X + 40 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 40 = 36 > 0$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction exponentielle (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Exercice7: Soit La fonction f définie par :

$$f(x) = 4^x - 2^{x+1}$$

1)déterminer D_f

2) calculer les limites aux bornes de D_f

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Etudier les branches infinies de la courbe C_f

5) construire la courbe C_f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Solutions : 1) $f(x) = e^{x \ln 4} - e^{(x+1) \ln 2}$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

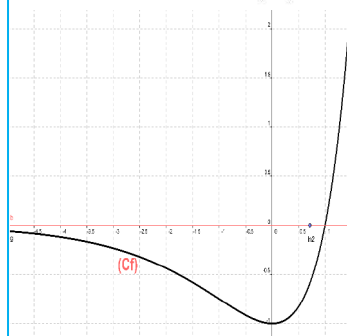
$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \ln 2} - e^{(x+1) \ln 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 2} (e^{\ln 2} - 2) = +\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

4) Etude des branches infinies de la courbe C_f :

a) on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc : $y = 0$

est une asymptote $a(C)$



$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x \ln 2} - e^{(x+1) \ln 2} = 0 \text{ Car : } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 2 \ln 2 \times e^{x \ln 2} \times (e^{\ln 2} - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tableau de variation de f :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 2}}{x} (e^{\ln 2} - 2) = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Donc : la courbe C_f admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$