Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction logarithme (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1ère et 2ème Bac International SM

Fonctions logarithmiques

La fonction logarithme népérien

Définition : La fonction logarithme népérienne est la fonction primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ et qui s'annule en 1 ; on la note par ln.

Conséquences immédiates

1) ln est définie sur $]0, +\infty[$
2) $f(x) = ln(u(x))$ est définie si et seulement si $u(x) > 0$
3) $ln(1) = 0$
4) ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(x \in]0, +\infty[)$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Monotonie

$(x \in]0, +\infty[)$ $(\ln x)' = \frac{1}{x} \succ 0$

Donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ on a donc 1) $ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$
2) $ln(a) \leq ln(b) \Leftrightarrow a \leq b$

Application 1

déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

1) $f : x \to ln(x+1)$ 2) $g : x \to ln(x^2 - 3x + 2)$

3) $h : x \to \frac{x}{\ln x}$ 4) $k : x \to \ln x + ln(x-1)$

5) $k : x \to \ln x + ln(x-1)$ 6) $m : x \to ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

solution :1) $f(x) = ln(x+1)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0\}$

$x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ donc : $D_f =]-1,+\infty[$

2) $g(x) = ln(x^2-3x+2)$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2-3x+2>0\}$

$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times2\times1 = 9-8 = 1 > 0$

$x_1 = \frac{3+1}{2\times1} = \frac{4}{2} = 2$ **et** $x_2 = \frac{3-1}{2\times1} = \frac{2}{2} = 1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	

Donc : $D_g =]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

3) $h(x) = \frac{x}{\ln x}$ $D_h = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 et \ln x \neq 0\}$

$\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$ donc : $D_h =]0;1[\cup]1;+\infty[$

5) $k : x \to \ln x + ln(x-1)$

La fonction est définie ssi $x>0$ et $x-1>0$ cad

$x>0$ et $x>1$ donc : $D_k =]1;+\infty[$

6) $m : x \to ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

La fonction est définie ssi $\frac{x-4}{x+1} > 0$ et $x+1>0$

On utilisant le tableau de signe on trouve :

$D_m =]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$

Application 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

1) $ln(x-2) = 0$ 2) $ln(3x-1) = ln(5x-10)$

3) $ln(2x-1) - ln(1-x) = 0$ 4) $ln(2x) = ln(x^2+1)$

5) $ln(2x-6) \geq 0$ 6) $ln(x-1) - ln(3x+1) < 0$

Solution :1) $ln(x-2) = 0$

a)cette équation est définie ssi : $x-2>0$

$x-2>0 \Leftrightarrow x>2$ donc : $D_E =]2;+\infty[$

b) Résoudre l'équation :

$ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow ln(x-2) = ln(1) \Leftrightarrow x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow \in D_E$

Donc : $S = \{3\}$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction logarithme (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1ère et 2ème Bac International SM

2) $ln(3x-1)=ln(5x-10)$

a) cette équation est définie ssi : $5x-10>0$ et $3x-1>0$ cad $x>2$ et $x>\frac{1}{3}$ donc : $D_E=]2;+\infty[$

b) Résoudre l'équation :

$ln(3x-1)=ln(5x-10) \Leftrightarrow 3x-1=5x-10 \Leftrightarrow -2x=-9$

Donc : $\Leftrightarrow x=\frac{9}{2}\in D_E$ donc : $S=\left\{\frac{9}{2}\right\}$

3) $ln(2x-1)-ln(1-x)=0$

a)cette équation est définie ssi : $2x-1>0$ et $1-x>0$ cad $x>\frac{1}{2}$ et $x<1$

donc : $D_E=\left]\frac{1}{2};1\right[$

b) Résoudre l'équation :

$ln(2x-1)-ln(1-x)=0 \Leftrightarrow ln(2x-1)=ln(1-x)$

$2x-1=1-x \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\in D_E$

Donc : $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

4) $ln(2x)=ln(x^2+1)$

a)cette équation est définie ssi : $2x>0$ et $x^2+1>0$ cad $x>0$ donc : $D_E=]0;+\infty[$

$In(2x)=In(x^2+1)\Leftrightarrow 2x=x^2+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1\in D_E$ Donc : $S=\{1\}$

5) $ln(2x-6)\geq 0$

a) cette équation est définie ssi : $2x-6>0$

$2x-6>0 \Leftrightarrow x>3$ Donc : $D_E=]3;+\infty[$

b) Résoudre l'inéquation :

$ln(2x-6)\geq 0 \Leftrightarrow ln(2x-6)\geq \ln 1 \Leftrightarrow 2x-6\geq 1$

6) $ln(x-1)-ln(3x+1)<0$

a) cette équation est définie ssi : $x-1>0$ et $3x+1>0$ cad $\left(x>-\frac{1}{3};x>1\right)$ donc $D_I=]1;+\infty[$

b) Résoudre l'inéquation :

$ln(x-1)-ln(3x+1)<0 \Leftrightarrow ln(x-1)<ln(3x+1)$

$x-1<3x+1 \Leftrightarrow 2x>-2 \Leftrightarrow x>-1$

Donc : $S=]-1;+\infty[\cap]1;+\infty[$ donc : $S=]1;+\infty[$

La propriété caractéristique de la fonction logarithme

$$(\forall x>0;\ \forall y>0)(ln(x\times y)=ln(x)+ln(y))$$

Règles de calcul

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a \qquad \ln(a^n)=n\ln a$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b \qquad \ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction logarithme (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1ère et 2ème Bac International SM

Application 3

On pose $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$

Calculer: $\ln(6)$; $\ln(4)$; $\ln(8)$; $\ln(72)$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$; $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$; $\ln(\sqrt{2})$; $\ln(\sqrt{6})$; $\ln(3\sqrt{2})$

Solution :

$\ln(6) = \ln(2\times 3) = \ln(2) + \ln(3) \simeq 0,7 + 1,1 \simeq 1,8$

$\ln(4) = \ln(2\times 2) = \ln(2^2) = 2\ln(2) \simeq 2\times 0,7 \simeq 1,4$

$\ln(8) = \ln(2\times 2\times 2) = \ln(2^3) = 3\ln(2) \simeq 3\times 0,7 \simeq 2,1$

$\ln(72) = \ln(3^2\times 2^3) = \ln(3^2) + \ln(2^3) = 2\ln(3) + 3\ln(2)$

$\ln(72) \simeq 2\times 1,1 + 3\times 0,7 \simeq 2,2 + 2,1 \simeq 4,3$

$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(3) - \ln(2) \simeq 1,1 - 0,7 \simeq 0,4$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \simeq -0,7$

$\ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2}\ln(6) \simeq \frac{1}{2}\times 1,8 \simeq 0,9$

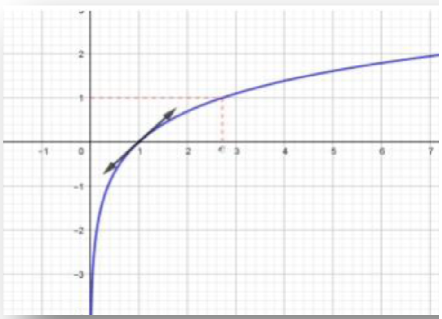
$\ln(3\sqrt{2}) = \ln(3) + \ln(\sqrt{2}) \simeq 1,1 + \frac{1}{2}\ln(2) \simeq 1,1 + \frac{0,7}{2} \simeq 1,1 + 0,35 \simeq 1,45$

Propriétés de la fonction logarithme (apprendre)

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ (où $r \in \mathbb{Q}_*^+$) 5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$ (où $r \in \mathbb{Q}_*^+$)

6) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ 7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$



Application 4

simplifier et calculer :

$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9)$$

$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln(e) + 4\ln(e) - -\ln(e)$

$A = 2\times 1 + 4\times 1 - -1 = 7$

$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9) = 2\times\frac{1}{2}\ln(e) + \ln e + \ln(\sqrt{e}) - \frac{1}{3}9\ln(e)$

$B = 1\ln(e) + \ln e + \frac{1}{2}\ln(e) - 3\ln(e) = 1 + 1 + \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction logarithme (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1ère et 2ème Bac International SM

Application 5

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(ln^2(x)-lnx\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-lnx$ 4) $\lim\limits_{x\to0^+} ln^2(x)+lnx$

5) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}+lnx\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to0^+} x^4\log x$

7) $\lim\limits_{x\to0^+} 2x-x^3\ln x$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Rappels

$\lim\limits_{x\to0+} x\ln(x)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$?

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x)+1=2\times(+\infty)+1=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$ donc forme indéterminé(FI)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x+1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x\left(2+\frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{\ln x}=2+0=2$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx=+\infty$)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ln^2(x)-lnx\right)$?

$\lim\limits_{x\to+\infty} ln^2(x)-lnx=\lim\limits_{x\to+\infty} ln^2(x)-lnx=\lim\limits_{x\to+\infty} lnx\left(ln(x)-1\right)=+\infty$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx=+\infty$)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-lnx$?

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-lnx=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)=+\infty$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx=+\infty$)

4) $\lim\limits_{x\to0^+} ln^2(x)+lnx$?

$\lim\limits_{x\to0^+} ln^2(x)+lnx=\lim\limits_{x\to0^+} lnx\left(ln(x)+1\right)=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x)+1=-\infty$

5) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}+lnx\right)$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x}+lnx=\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1+xlnx}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} xlnx=0$

6) $\lim\limits_{x\to0^+} x^4\log x=0$ car $\lim\limits_{x\to0^+} x^n\ln x=0$ (où $n\in\mathbb{N}^*$)

7) $\lim\limits_{x\to0^+} 2x-x^3\ln x=0$

8- faites un changement de variable pour utiliser la propriété $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x}=1$

Résultat = 1

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction logarithme (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1ère et 2ème Bac International SM

Application 6

déterminer le domaine de définition

1) $f : x \to \dfrac{ln(x+1)}{ln(\ln x)}$ 2) $g : x \to \sqrt{1 - ln(e-x)}$

3) $h : x \to \dfrac{x}{\sqrt{(ln(2x))^2 - 1}}$

Solution : 1) cette fonction est définie ssi :

$x+1>0$ et $x>0$ et $\ln x>0$ et $ln(\ln x)\neq 0$

Cad $x>-1$ et $x>0$ et $x>1$ et $\ln x \neq 1$

Cad $x>1$ et $x\neq e$ donc : $D_f =]1;e[\cup]e;+\infty[$

2) cette fonction est définie ssi :

$e-x>0$ et $1\geq ln(e-x)$

Cad $x \prec e$ et $e-x\leq e$ Cad $x\prec e$ et $x\geq 0$

donc : $D_g = [0;e[$

3) $h : x \to \dfrac{x}{\sqrt{(ln(2x))^2 - 1}}$

Cette fonction est définie ssi :

$2x>0$ et $(ln(2x))^2 - 1 \succ 0$

Cad $x>0$ et $(ln(2x)-1)(ln(2x)+1)\succ 0$

$ln(2x)+1=0 \Leftrightarrow \ln 2x = -1 \Leftrightarrow \ln 2x = \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2e}$

$ln(2x)-1=0 \Leftrightarrow \ln 2x = 1 \Leftrightarrow \ln 2x = \ln e \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$

x	0		$\frac{1}{2e}$		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$ln2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$ln2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(ln2x+1)(ln2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left]0;\frac{1}{2e}\right]\cup\left[\frac{e}{2};+\infty\right[$

Dérivée de la fonction ln(u(x))

$$[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple1 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction suivante :

$f(x) = \ln(3x^2+5)$

Solution : la fonction $u : x \to 3x^2+5$ est dérivable

sur $\mathbb{R}$ et on a : $3x^2+5 \succ 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

alors la fonction : $f : x \to \ln(3x^2+5)$ est dérivable

sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = \frac{(3x^2+5)'}{3x^2+5} = \frac{6x}{3x^2+5} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Exemple2 : calculer la dérivée des fonctions définies par :1) $f(x)=x^2-\ln x$ 2) $f(x)=x\ln x$

3) $f(x)=\ln(1+x^2)$

Solution :1) $f'(x)=(x^2-\ln x)'=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$

2) $f'(x)=(x\ln x)'=x'\ln x+x\ln' x=1\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

3) $f'(x)=(\ln(1+x^2))'=\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}$

Propriété : Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors les fonctions primitives de la fonction $x\rightarrow\frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions ;

$F(x) = l\,n(|u(x)|) + Cte$

Application 7 Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

1) $I=\mathbb{R};f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}$ 2) $I=]0;1[;g(x)=\frac{1}{xlnx}$

3) $I=]-\infty;1[;h(x)=\frac{1}{x-1}$ 4) $I=\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[;k(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

Vérifiez les intervalles des primitives

Solution : 1)on a $f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}=\frac{1}{4}\frac{(x^4+2)'}{x^4+2}$

Donc : $F(x)=\frac{1}{4}\ln|x^4+2|+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Puisque : $x^4+2>0$ donc : $F(x)=\frac{1}{4}\ln(x^4+2)+k$

2) $f(x)=\frac{1}{xlnx}=\frac{\frac{1}{x}}{lnx}=\frac{(lnx)'}{lnx}$

donc les fonctions primitives sont :

$G(x)=\ln|\ln x|+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Puisque : $x\in]0;1[$ donc : $\ln x\prec 0$

Donc : $F(x)=\ln(-\ln x)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) $I =]-\infty;1[; h(x) = \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)'}{x-1}$ donc les fonctions primitives sont : $H(x) = \ln|x-1| + k$

Puisque : $x \in]-\infty;1[$ donc : $x-1 \prec 0$

Donc : $H(x) = \ln(1-x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

4) $I = \left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[; k(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(\sin x)'}{\sin x}$ donc les fonctions primitives sont : $K(x) = \ln|\sin x| + k$

avec $k \in \mathbb{R}$

Application 8 Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et Déterminer les réels a et b tels que :

$$(\forall x \in D); f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

2) en déduire la fonction primitive de f sur $]-\infty;-2[$

Tel que $F(-3) = \ln 2$

Solution :1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \neq 0\}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 1 + 8 = 9 > 0$

$x_1 = \frac{-1+3}{2\times 1} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-1-3}{2\times 1} = \frac{-4}{2} = -2$

Donc : $D_f = \mathbb{R} / \{-2;1\}$

$$f(x) = \frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{ax+2a+bx-b}{(x-1)(x+2)} = \frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}$$

Donc : $\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-b=1 \end{cases}$ Donc: $3a = 6$ Donc: $a = 2$

Donc : $b = 3$ Donc: $(\forall x \in D_f); f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$

2) $(\forall x \in \mathbb{R} / \{-2;1\}); f(x) = 2\frac{(x-1)'}{x-1} + 3\frac{(x+2)'}{x+2}$

$F(x) = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + k \quad k \in \mathbb{R}$

$x \in]-\infty;-2[\Leftrightarrow x < -2$ et $x < 1$

Donc : $x+2 < 0$ et $x-1 < 0$

Donc : les fonctions primitives sont :

$$F(x) = 2\ln(1-x) + 3\ln(-x-2) + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$F(-3) = \ln 2 \Leftrightarrow 2\ln(4) + 3\ln(1) + k = \ln 2$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction logarithme (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1ère et 2ème Bac International SM

La fonction logarithme de base a

Définition

Soit a un réel non nul et différents
de 1. La fonction notée par $\log_a$ définie sur]0, +∞[
par :$(\forall x \in]0, +\infty[)$ ($\log_a = \dfrac{\ln x}{\ln a}$) S'appelle :
la fonction logarithmique de base a

Pour: $a = e$ on aura : $\log_e = \dfrac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

Propriétés et règles de calcul

Toutes les propriétés de calcul qu'on a vu concernant la fonction *ln* restent valables pour la fonction log*a* .

$$(\forall x > 0)(\forall y > 0)(Log_a(xy) = Log_a(x) + Log_a(y))$$

$$(\forall x > 0)\left(Log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -Log_a(x)\right)$$

$$(\forall x > 0)(\forall y > 0)\left(Log_a\left(\frac{x}{y}\right) = Log_a(x) - Log_a(y)\right)$$

$$(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(Log_a(x^r) = rLog_a(x))$$

b) Propriétés :La fonction $\log_a$ est une bijection
de]0, +∞[vers $\mathbb{R}$

1) $(\forall x > 0)(\forall y > 0)(\ \log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y)$

2) $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\ \log_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r$

c)Propriété :La fonction $\log_a$ est continue
dérivable sur]0, +∞[et $(\forall x \in]0, +\infty[)$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$$

La preuve est immédiate

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction logarithme (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / $1^{ère}$ et $2^{ème}$ Bac International SM

Etude de la fonction $\log_a$

Soit a un réel strictement positif et différent de 1 :

1)La fonction $\log_a$ est définie sur]0, +∞[.

2) La fonction $\log_a$ est continue et dérivable

sur]0, +∞[et $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \left(\left(\log_a(x)\right)' = \dfrac{1}{x\ln a} \right)$

donc le signe de $\log_a'$ dépend du signe de lna, ce

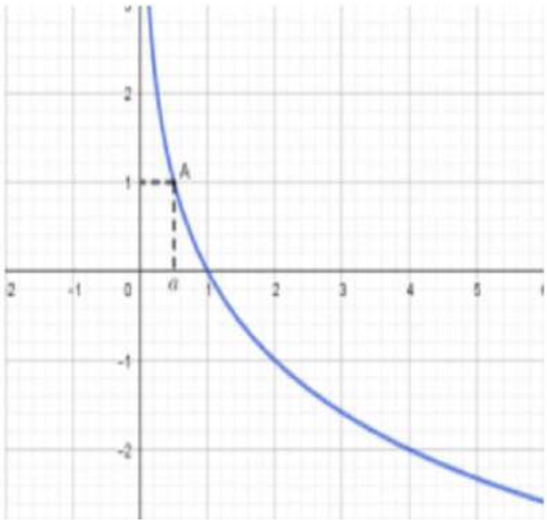
qui nous amène à discuter deux cas :

$lna > 0$; $lna < 0$

Si $a \in]0,1[$ alors $lna < 0$

Et donc : $(\forall x \in]0,+\infty[)\left(Log_a'(x) = \dfrac{1}{x\,lna} < 0\right)$.

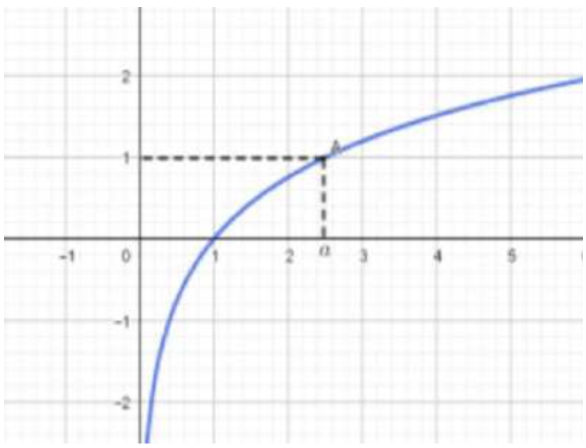
x	0		a		1		$+\infty$
$Log_a'(x)$				$-$		$-$	
$Log_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



Si $a \in]1,+\infty[$ alors $lna > 0$

Et donc : $(\forall x \in]0,+\infty[)\left(Log_a'(x) = \dfrac{1}{x\,lna} > 0\right)$.

x	0		1		a		$+\infty$
$Log_a'(x)$				$+$		$+$	
$Log_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction logarithme (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / $1^{ère}$ et $2^{ème}$ Bac International SM

Application 9 : simplifier et calculer

1) $\log_8 4$ 2) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$ 3) $\log_{\sqrt{3}} 9$

4) $A = \log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right)$

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

Solution :1)

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = -\log_{\sqrt{2}} 2 = -\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^2 = -2\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2} = -2\times 1 = -2$$

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^4 = 4\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 4\times 1 = 4$$

$$A = \log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right) = -\log_2 5 + \log_2(5\times 2) + \log_{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{5}}\right)$$

$$A = -\log_2 5 + \log_2 5 + \log_2 2 + \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{3}} 3$$

$$A = 1 - \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Cas particuliers a=10 (logarithme décimal)

Définition :La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se note par ***log*** et $(\forall x \in]0, +\infty[)$ $\left(\log = \frac{\ln x}{\ln 10}\right)$

Propriétés :1) $log(10) = 1$

2) $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r)$

3) $(\forall r \in \mathbb{Q})(\ log(10^r) = r$

4) $log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$

5) $log(x) \leq r \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^r$

Application 10 simplifier et calculer :

1) $\log_{10} 100$ 2) $\log_{10} 0,0001$

3) $A = \log(250000) + \log\sqrt{250} - \log(125)$

Solution : 1) $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10 = 2\times 1 = 2$

2) $\log_{10} 0,0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4\log_{10} 10 = -4$

3) $A = \log(250000) + \log\sqrt{250} - \log(125)$

$A = \log(250000) + \log\sqrt{250} - \log(125)$

$A = \log(5^2\times 10^4) + \frac{1}{2}\log(5^2\times 10) - \log(5^3)$

$A = \log 5^2 + \log 10^4 + \frac{1}{2}(\log 5^2 + \log 10) - 3\log 5$

$A = 2\log 5 + 4\log 10 + \frac{1}{2}(2\log 5 + 1) - 3\log 5$

$A = 2\log 5 + 4 + \log 5 + \frac{1}{2} - 3\log 5 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

Application 11 :déterminer le plus petit entier naturel

n tel que : $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 10^{20}$

Solution : $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 10^{20} \Leftrightarrow \log\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) \geq \log(10^{20})$

$\Leftrightarrow n\log\left(\frac{3}{2}\right) \geq 20 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{20}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}$

Le plus petit entier naturel n_0 est donc :

$$n_0 = E\left(\dfrac{20}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}\right) + 1 = 114$$