

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction primitive (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Fonctions primitives

I) FONCTION PRIMITIVE D'UNE FONCTION

1) Activités

1) Déterminer une fonction F qui admet pour fonction dérivée la fonction : $f(x) = x^2 + 2x + 3$

2) existe-t-il une autre fonction G tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); G'(x) = f(x) ?$$

3) combien Ya t'ils de onction H tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); H'(x) = f(x) ?$$

et donner une expression de toutes les fonctions primitives de h

2) Définition et propriétés

Définition : Soit f une fonction définir sur un intervalle I ; On dit que la fonction F est une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I si :

- 1) F est dérivable sur I
- 2) $(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$

Théorème :(admis)

Si f est continue sur I alors f admet une fonction primitive sur I

Propriété : Si f admet une fonction primitive F sur I alors toutes les fonctions primitives de f sur I s'écrivent de la : forme : $F + \lambda$ où λ est un réel.

Propriété : Si F_1 et F_2 sont deux fonction primitive d'une fonction f sur I alors :

$$(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Propriété : Si f admet une fonction primitive sur I et $x_0 \in I$; alors il existe une unique fonction F_0 fonction Primitive de f telle que $F_0(x_0) = y_0$ où y_0 un réel quelconque.

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction primitive (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$

par : $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$

1) Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $]0; +\infty[$

2) Déterminer la fonction primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$ tel que : $F(1) = 3$

Solution : 1) $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$	$F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 1 + k = 3 \Leftrightarrow \frac{7}{6} + k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{11}{6}$
Donc : $F(x) = 2 \times \frac{1}{3} x^{2+1} + \frac{1}{2} x^{1+1} + 1x - \frac{1}{x^2} + k$	Donc : la fonction primitive de la fonction f sur
Donc : $F(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$	$]0; +\infty[$ tel que : $F(1) = 3$ est :
2) $F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2} \times 1^2 + 1 - \frac{1}{1} + k = 3$	$F(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{11}{6}$

Propriété : Si F est une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I et G une fonction primitive de la fonction g sur l'intervalle I et α un réel alors :

1) $(F + G)$ est une fonction primitive de la fonction $(f + g)$ sur I

2) (αF) est une fonction primitive de la fonction (αf) sur I

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction primitive (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

3) Tableau des fonctions primitives usuelles.

La fonction	Sa fonction primitive
$\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$
$x^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$

4) Opérations sur les fonctions primitives.

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u' u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u'^n \sqrt{u} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u' u^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v' \text{ ou } v' \times u'$	$vu + C^{te}$

5) Application

Exercice1 (situation directe): Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$ 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1$

3) $f(x) = \sin x + x \cos x$ 4) $f(x) = (2x - 1)^3$

5) $f(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^2}$ 6) $f(x) = 5x^3 \sqrt{3x^2 + 1}$

7) $f(x) = \frac{4x + 1}{(2x^2 + x)^4}$ 8) $f(x) = 7x \cos(\pi x^2 + 3)$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction primitive (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Solutions : 1) $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$

$$F(x) = 5 \times \frac{1}{5} x^5 + 3 \times \frac{1}{2} x^2 + 1x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1$$

$$F(x) = 2\sqrt{x} + \sin x - \cos x - x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{1}{8}(2x-1)^4 + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$5) f(x) = -\frac{x}{(x^2-1)^2}$$

on doit remarquer que : $f(x) = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

et par suite : $F(x) = \frac{1}{x^2-1} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$

(c'est de la forme : $u^n \sqrt[n]{u}$ ($n = 3$))

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous

$$\text{la forme : } F(x) = \frac{5}{6} \frac{3}{4} \sqrt[3]{u^4(x)} + k$$

$$F(x) = \frac{5}{8} \sqrt[3]{(3x^2+1)^4} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

En utilisant le tableau on a :

(c'est de la forme : $u' u^n$ ($n = -4$))

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous

$$\text{la forme : } F(x) = \frac{1}{-4+1} u^{-4+1}(x) + k$$

$$F(x) = -\frac{1}{3} (2x^2+x)^{-3} + k = -\frac{1}{3} \frac{1}{(2x^2+x)^3} + k$$

$$8) f(x) = 7x \cos(\pi x^2 + 3) \text{ On doit remarquer que :}$$

la fonction $u(x) = \pi x^2 + 3$ donne $u'(x) = 2\pi x$

$$3) f(x) = \sin x + x \cos x = x' \sin x + x(\sin x)'$$

Donc : $F(x) = x \times \sin x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$

$$4) f(x) = (2x-1)^3 = \frac{1}{2} (2x-1)' (2x-1)^3$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3+1} (2x-1)^{3+1} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$6) f(x) = 5x \sqrt[3]{3x^2+1} \text{ On doit remarquer que :}$$

la fonction $u(x) = 3x^2+1$ donne $u'(x) = 6x$ et par

suite : $f(x) = \frac{5}{6} u'(x) \sqrt[3]{u(x)}$ on utilisant le tableau

7) Déterminons une fonction primitive de :

$$f(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^4} \text{ On doit remarquer que :}$$

la fonction $u(x) = 2x^2+x$ donne $u'(x) = 4x+1$

et par suite : $f(x) = \frac{u'(x)}{u^4(x)} = u'(x) u^{-4}(x)$

$$\text{et par suite : } f(x) = \frac{7}{2\pi} u'(x) \cos(u(x))$$

(c'est de la forme : $u' \times (v' \circ u)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous

$$\text{la forme : } F(x) = \frac{7}{2\pi} \sin(\pi x^2 + 3) + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction primitive (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Exercice2 : Déterminer une fonction primitive de

fonction suivante : $f(x) = \frac{6}{4x^2 + 4x + 1}$

Solutions : A remarquer que

$$f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2} = (-3) \left(-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} \right) \text{ (C'est de la forme: } -\frac{u'}{u^2} \text{)}$$

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont

$$\text{les fonctions : } F(x) = \frac{-3}{2x+1} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Exercice3 : Déterminer les fonctions primitives des fonctions :

$$1) f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{2 + \cos x}}$$

$$2) f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x \quad 3) f(x) = (4x + 5)^2$$

$$4) f(x) = 2\sqrt{2x+1} \quad 5) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$6) f(x) = x\sqrt{x^2+1} \quad 7) f(x) = \tan^2 x$$

Solutions : 1) il faut faire des transformations :
a remarquer que :

$$1) f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{2 + \cos x}} = -(2 + \cos x)' (2 + \cos x)^{-\frac{1}{3}}$$

$$2) f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)'$$

$$\text{Donc : } F(x) = x^2 \times \sin x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$3) f(x) = (4x + 5)^2 = \frac{1}{4} (4x + 5)' (4x + 5)^2$$

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2+1} (4x+5)^{2+1} + k$$

$$F(x) = \frac{1}{12} (4x+5)^3 + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

(c'est de la forme : $u'u^n$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{-\frac{1}{3}+1} (2 + \cos x)^{\frac{1}{3}+1} + k = -\frac{3}{2} (2 + \cos x)^{\frac{2}{3}} + k$$

$$F(x) = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{(2 + \cos x)^2} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$4) f(x) = 2\sqrt{2x+1} = (2x+1)' (2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Donc : } F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+1)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (\sqrt{2x+1})^3 + k$$

$$5) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$F(x) = \sqrt{x^2+1} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Fonction primitive (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

$$6) f(x) = x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x^2+1)^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$7) f(x) = \tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1$$

$$F(x) = \frac{1}{3} (\sqrt{x^2+1})^3 + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \tan x - x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$