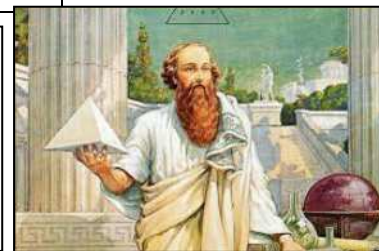


|                   |                                                                        |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------|
| <b>Professeur</b> | Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52                                     |
| <b>Chapitre</b>   | Fonctions trigonométriques (l'essentiel du cours + applications)       |
| <b>Niveaux</b>    | 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac français et Bac International |

L'histoire des [fonctions trigonométriques](#) semble avoir débuté il y a environ 4 000 ans. Nous savons de façon certaine que les [Babyloniens](#) déterminaient des approximations de mesures d'angles ou de longueurs de côtés de triangles rectangles. Plusieurs tables de nombres gravés sur de l'argile séchée en témoignent

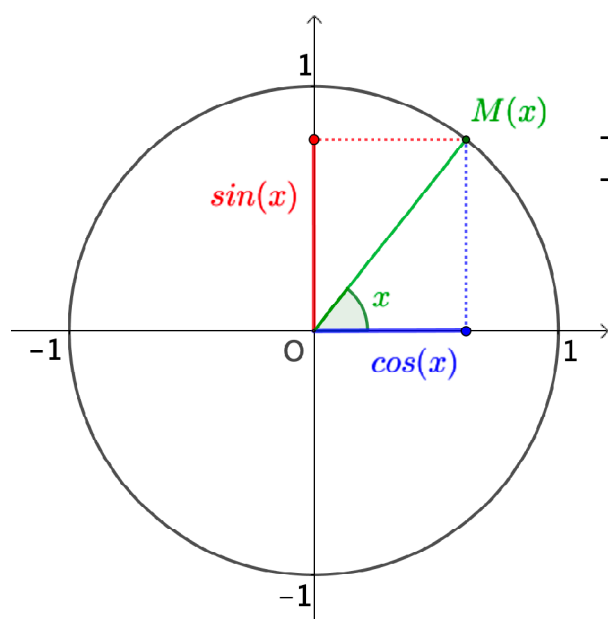


Pythagore

## 1 : Cosinus, sinus et cercle trigonométrique

A l'aide du cercle trigonométrique (de rayon 1 et de centre O), il est possible de lire le cosinus et le sinus d'un nombre.

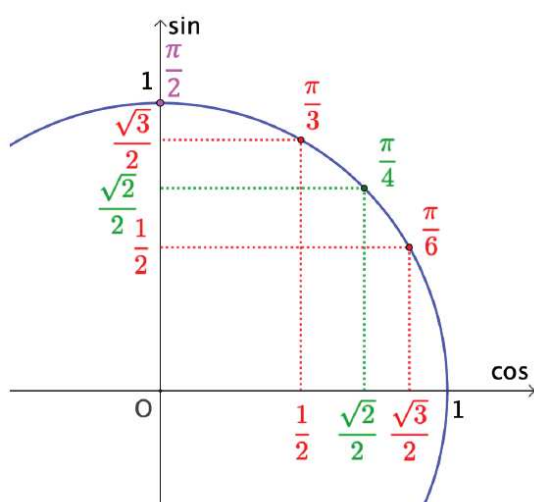
Le cosinus se lit sur l'axe des abscisses et le sinus sur l'axe des ordonnées.



- Le **cosinus** de  $x$  est l'abscisse de M et on note **cos**( $x$ ).
- Le **sinus** de  $x$  est l'ordonnée de M et on note **sin**( $x$ ).

### Propriétés :

- 1)  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$  et  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- 2)  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$



### Valeurs remarquables à apprendre

| $x$       | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|-----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------|
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | -1    |
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | 0     |

|                   |                                                                        |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------|
| <b>Professeur</b> | Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52                                     |
| <b>Chapitre</b>   | Fonctions trigonométriques (l'essentiel du cours + applications)       |
| <b>Niveaux</b>    | 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac français et Bac International |

## 2 : Résoudre une équation et inéquation trigonométrique

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$ .

2) Résoudre dans  $[-\pi ; \pi]$ , l'inéquation :  $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Correction**

$$1) \cos^2(x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2(x) - \frac{1}{2} = 0$$

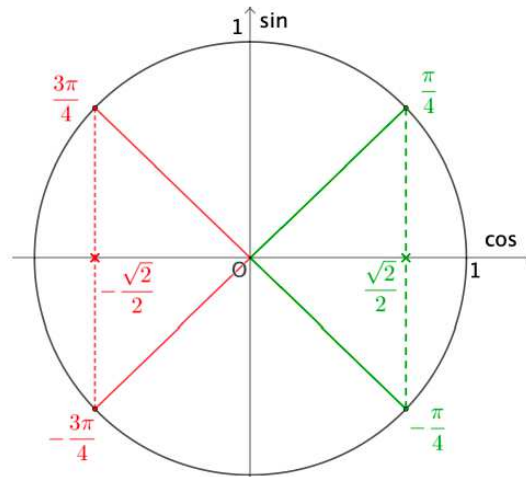
$$\cos^2(x) - \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0$$

$$\cos^2(x) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\text{En effet : } \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soit :

$$\left(\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$



$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi, & k_1 \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k_2\pi, & k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2k_3\pi, & k_3 \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k_4\pi, & k_4 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2) \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- On commence par résoudre l'équation  $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  dans  $[-\pi ; \pi]$ .

$$\text{Soit : } x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}.$$

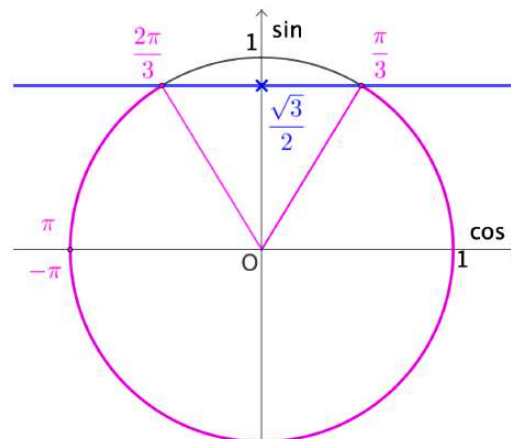
- On veut des valeurs de sinus inférieures à  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Elles correspondent à la **partie du cercle trigonométrique** située en dessous des points

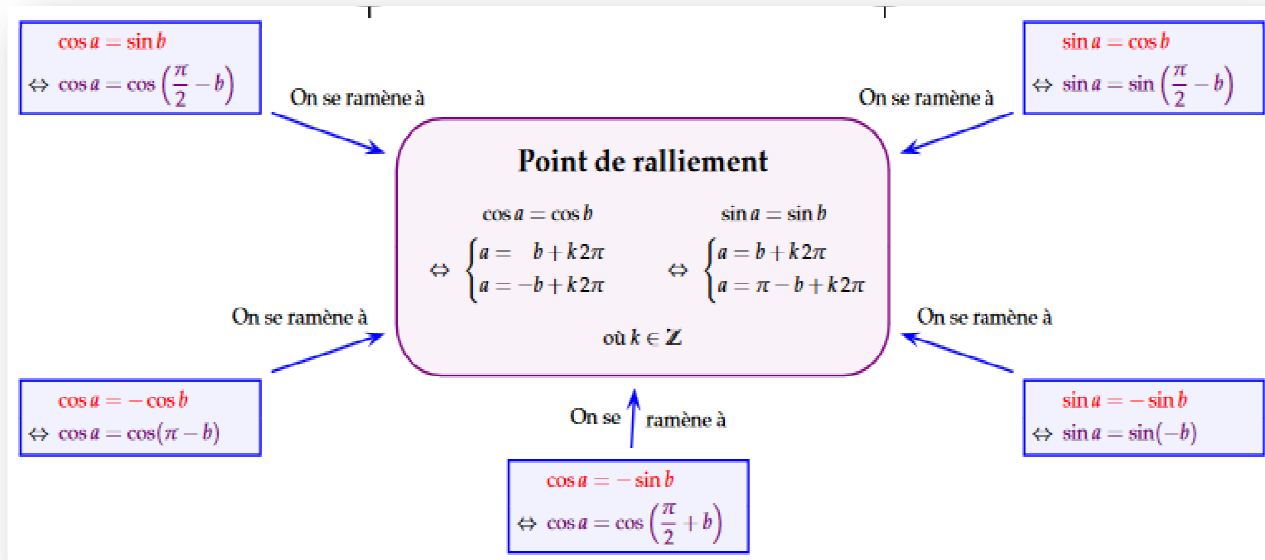
associés à  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{2\pi}{3}$ .

Ainsi :

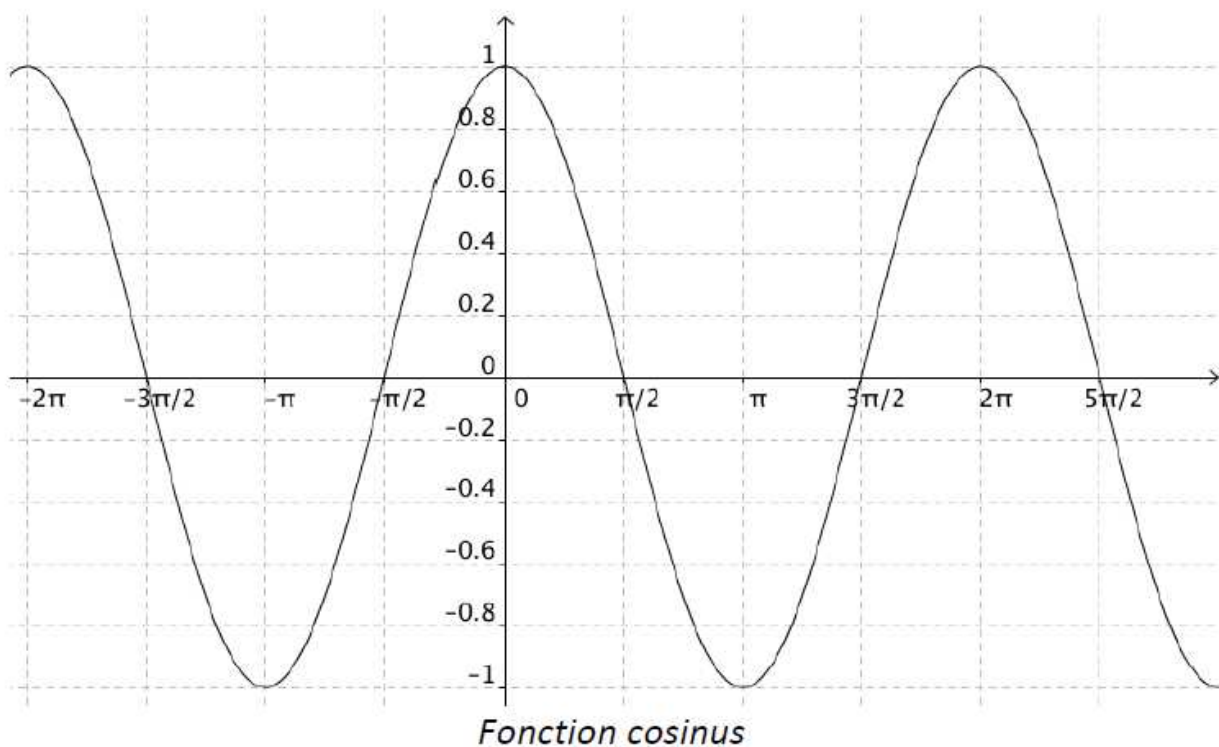
$$S = \left[-\pi ; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$$



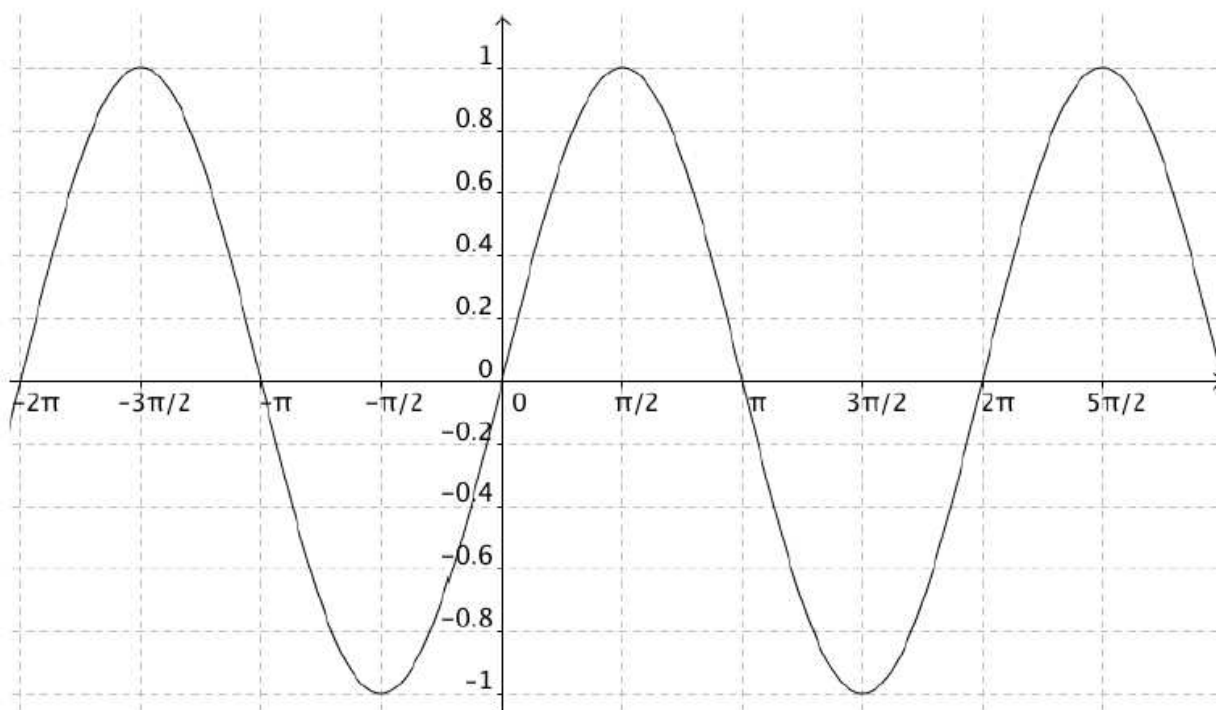
|                   |                                                                        |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------|
| <b>Professeur</b> | Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52                                     |
| <b>Chapitre</b>   | Fonctions trigonométriques (l'essentiel du cours + applications)       |
| <b>Niveaux</b>    | 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac français et Bac International |



### 3 : Propriétés des fonctions trigonométriques



|                   |                                                                        |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------|
| <b>Professeur</b> | Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52                                     |
| <b>Chapitre</b>   | Fonctions trigonométriques (l'essentiel du cours + applications)       |
| <b>Niveaux</b>    | 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac français et Bac International |



Fonction sinus

1)  $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$  où  $k$  entier relatif.

2)  $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$  où  $k$  entier relatif.

- La fonction cosinus est paire et on a :  $\cos(-x) = \cos(x)$

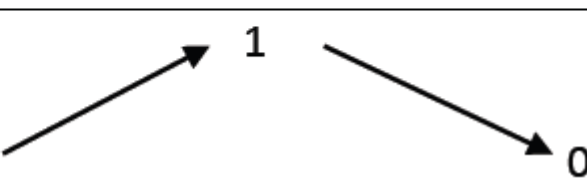
- La fonction sinus est impaire et on a :  $\sin(-x) = -\sin(x)$

| Fonction                           | Dérivée           |
|------------------------------------|-------------------|
| $\cos(x)$                          | $-\sin(x)$        |
| $\sin(x)$                          | $\cos(x)$         |
| $\cos(ax + b)$<br>$a$ et $b$ réels | $-a \sin(ax + b)$ |
| $\sin(ax + b)$<br>$a$ et $b$ réels | $a \cos(ax + b)$  |

|                       |   |       |
|-----------------------|---|-------|
| $x$                   | 0 | $\pi$ |
| $\cos'(x) = -\sin(x)$ | 0 | 0     |
| $\cos(x)$             | 1 | -1    |

|                   |                                                                        |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------|
| <b>Professeur</b> | Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52                                     |
| <b>Chapitre</b>   | Fonctions trigonométriques (l'essentiel du cours + applications)       |
| <b>Niveaux</b>    | 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac français et Bac International |

|                      |   |                 |       |
|----------------------|---|-----------------|-------|
| $x$                  | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
| $\sin'(x) = \cos(x)$ | + | 0               | -     |
| $\sin(x)$            | 0 | 1               | 0     |



### Application 1

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$       b)  $\cos x = -\frac{1}{2}$       c)  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

**Correction:** a)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ssi  $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$

Donc les solutions de l'équation dans  $\mathbb{R}$  sont :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{ssi} \quad \cos x = -\cos \frac{\pi}{3} \quad \text{ssi}$$

$$\cos x = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{ssi} \quad \cos x = \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right)$$

Donc les solutions de l'équation dans  $\mathbb{R}$  sont :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{c) } \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left( \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \text{ ou } \cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$$

Ainsi :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

### Application 2

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$       b)  $\sin x = -\frac{1}{2}$       c)  $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

|                   |                                                                        |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------|
| <b>Professeur</b> | Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52                                     |
| <b>Chapitre</b>   | Fonctions trigonométriques (l'essentiel du cours + applications)       |
| <b>Niveaux</b>    | 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac français et Bac International |

**Correction:** a)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ssi  $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$

Donc les solutions de l'équation dans  $\mathbb{R}$  sont :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b)  $\sin x = -\frac{1}{2}$  ssi  $\sin x = -\sin \frac{\pi}{6}$  ssi  $\sin x = \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right)$

L'équation a pour solution  $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  et

$$\pi - \left( -\frac{\pi}{6} \right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Donc les solutions de l'équation dans  $\mathbb{R}$  sont :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c)  $\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left( \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \text{ ou } \sin x = \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right)$$

Ainsi :  $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

## 4 : équations et propriétés à retenir

|                                                                             |                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ définie si $x \neq \frac{\pi}{2} (\pi)$ | $\cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ définie si $x \neq 0 (\pi)$ |
|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|

|                             |                                                                       |                                                             |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ | $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} (\pi)$ | $1 + \cotan^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$ si $x \neq 0 (\pi)$ |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|

|                      |                       |                       |                           |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|
| $\cos(-a) = \cos(a)$ | $\sin(-a) = -\sin(a)$ | $\tan(-a) = -\tan(a)$ | $\cotan(-a) = -\cotan(a)$ |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|

|                            |                                                  |                            |                                                   |
|----------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------|
| $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$   | $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ | $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$   |
| $\sin(\pi - x) = \sin(x)$  | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$   | $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ | $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$    |
| $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cotan(x)$ | $\tan(\pi + x) = \tan(x)$  | $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cotan(x)$ |

Valeurs remarquables :

|     | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$     | $\pi$ |
|-----|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|-------|
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | $-\frac{1}{2}$       | -1    |
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0     |
| tan | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           |                 | $-\sqrt{3}$          | 0     |

|                   |                                                                        |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------|
| <b>Professeur</b> | Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52                                     |
| <b>Chapitre</b>   | Fonctions trigonométriques (l'essentiel du cours + applications)       |
| <b>Niveaux</b>    | 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac français et Bac International |

### Formules d'addition

|                                                            |                                                            |
|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$              | $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$              |
| $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$              | $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$              |
| $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ | $\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$ |

En particulier on a les relations suivantes avec l'angle double :

|                                                                      |                                             |
|----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$ | $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$ |
| $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$                                         |                                             |
| $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$                                 |                                             |
| $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$                                 |                                             |

### Formules de linéarisation :

|                                                         |
|---------------------------------------------------------|
| $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$  |
| $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$  |
| $\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$ |

|                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$  |
| $\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$  |
| $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$  |
| $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ |

|                   |                                                                        |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------|
| <b>Professeur</b> | Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52                                     |
| <b>Chapitre</b>   | Fonctions trigonométriques (l'essentiel du cours + applications)       |
| <b>Niveaux</b>    | 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac français et Bac International |

### Equations trigonométriques

|                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b & (2\pi) \\ a = -b & (2\pi) \end{cases}$      |
| $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b & (2\pi) \\ a = \pi - b & (2\pi) \end{cases}$ |
| $\tan(a) = \tan(b) \Leftrightarrow a = b \quad (\pi)$                                                |

### Lien avec l'exponentielle complexe

|                                                                        |                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$                                         |                                                                         |
| $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$ | $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$ |

### Relations avec la tangente de l'angle moitié

$a \neq \pi \quad (2\pi)$ , on pose  $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$

|                                     |                                |                                |
|-------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $\cos(a) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ | $\sin(a) = \frac{2t}{1 + t^2}$ | $\tan(a) = \frac{2t}{1 - t^2}$ |
|-------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|

## 5 : Résoudre $a\cos(x) + b\sin(x)=c$

- on commence par factoriser par  $\sqrt{a^2 + b^2}$  pour transformer l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- on cherche un réel  $\theta$  tel que

$$\begin{cases} \cos(\theta) &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin(\theta) &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

L'équation devient donc

$$\cos(\theta) \cos(x) + \sin(\theta) \sin(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- on utilise une formule de trigonométrie pour transformer cette équation en

$$\cos(x - \theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

équation que l'on sait résoudre par ailleurs