

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie dans l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

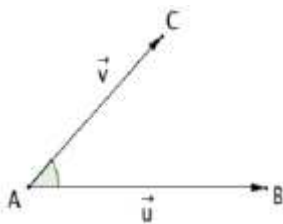
Géométrie dans l'espace.

1) Le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux dans l'espace si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Et on écrit : $\vec{u} \perp \vec{v}$

2) Produit scalaire et norme

Soit un vecteur $\vec{u}$ de l'espace et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad \text{et} \quad \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = \overrightarrow{AB}^2$$

3) Repère orthonormé

Définition 1 : on dit qu'un triplet $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de vecteurs dans l'espace est base orthonormée si et seulement si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires et normés et orthogonaux deux à deux c a d : $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 1$ et $\|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ et $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie dans l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Définition2 : on dit que $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un repère orthonormé dans l'espace et seulement si $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est une base orthonormée

4) Expression analytique du produit scalaire

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est une base orthonormée Dans tout ce qui va suivre

Propriété :

1) Dans une base orthonormée on considère deux vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, soient A et B de coordonnées respectives $A(x_A; y_A; z_A)$ et

$B(x_B; y_B; z_B)$

alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Exemple : dans une base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère

les vecteurs $\vec{u}(1; 5; -1)$ et $\vec{v}(-5; 1; 0)$ et $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$

1) Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ?

2) Calculer : la norme du vecteur $\vec{w}$

Solution : 1)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-5) \times 1 + 1 \times 5 + 0 \times (-1) = (-5) + 5 = 0$$

Donc : $\vec{u} \perp \vec{v}$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1 \text{ on dit que}$$

$\vec{w}$ est un vecteur unitaire

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie dans l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

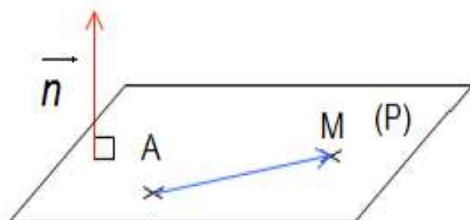
Exercice1 : dans une base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(3; -2; 1)$ et $\vec{v}(2; 1; 0)$

Calculer : $\cos(\vec{u}; \vec{v})$

$$\text{Solution : } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{70}}$$

5) équation cartésienne d'un plan dans l'espace

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan $\mathcal{P}$ si, pour tous points A et M de $\mathcal{P}$, on a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$



Propriété : Un vecteur est dit normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Exemple1 : déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à un plan dirigé par $\vec{u}(2; -1; 3)$ et $\vec{v}(4; 0; 2)$

Solution : Ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires : une coordonnée est nulle pour l'un mais pas pour l'autre.

On note $\vec{n}(x; y; z)$

Puisque $\vec{n}$ est normal au plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

On obtient ainsi les deux équations $2x - y + 3z = 0$ et $4x + 2z = 0$

A l'aide de la deuxième équation, on obtient $z = -2x$. On remplace dans la première :

$$2x - y - 6x = 0 \Leftrightarrow -4x - y = 0 \Leftrightarrow y = -4x.$$

On choisit, par exemple $x = 1$ et on trouve ainsi :

$$\vec{v}(1; -4; -2)$$

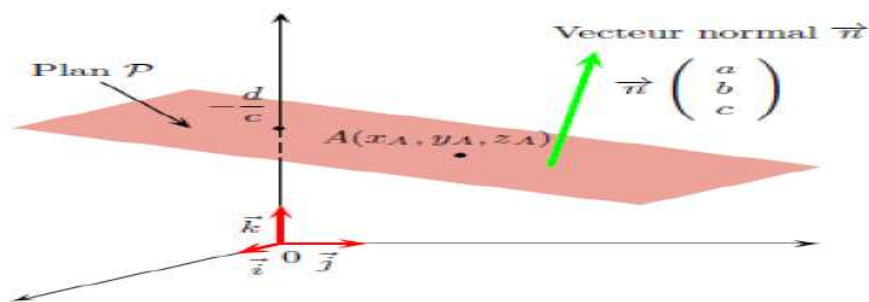
On vérifie : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 + 4 - 6 = 0 \checkmark$ et

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 4 + 0 - 4 = 0 \checkmark.$$

Un vecteur normal au plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\vec{n}(1; -4; -2)$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie dans l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Propriété : Soient a et b et c des réels non tous nuls quelconque. L'ensemble (P) des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}(a; b; c)$.



Démonstration $\Rightarrow$ soit un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ soit A et B deux points distincts de P alors on a

$$\begin{cases} ax_a + by_a + cz_a + d = 0 \\ ax_b + by_b + cz_b + d = 0 \end{cases}$$

Faisant la différence $\Rightarrow a(x_b - x_a) + b(y_b - y_a) + c(z_b - z_a) = 0$

On remarque que quelque soient les points A et B que vous choisissiez le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est toujours normale à ce vecteur.....

Exercice3 : déterminer un vecteur normal au plan (P) dans

les cas suivants

1) $(P) : 2x - 3y + z + 10 = 0$ 2) $(P) : 3x - z + 1 = 0$

3) $(P) : y + z + 1 = 0$ 4) $(P) : z = 2$

5) $(P) : x - 2y + 7z - 3 = 0$ 6) $(P) : 2y - z + 11 = 0$

Solution : 1) $\vec{n}(2; -3; 1)$ 2) $\vec{n}(3; 0; -1)$ 3) $\vec{n}(0; 1; 1)$
4) $\vec{n}(0; 0; 1)$ 5) $\vec{n}(1; -2; 7)$ 6) $\vec{n}(0; 2; -1)$

Exercice4: L'espace est muni d'un repère orthonormé

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(-1; 0; 2)$ et $B(3; 1; 0)$

et le vecteur $\vec{n}(1; 2; 1)$

1) déterminer une équation du plan (P) passant par A dont un vecteur normal est $\vec{n}$

2) donner une représentation paramétrique de la droite (D) qui passe par le point B et orthogonale au plan (P)

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie dans l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

3) Déterminer les coordonnées du point B' la projection orthogonale de B sur le plan (P)

Solution : 1) méthode :

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\text{on a : } \overrightarrow{AM}(x+1; y; z-2)$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \times 1 + y \times 2 + 1 \times (z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 + 2y + z - 2 = 0$$

$$\text{Donc : } x + 2y + z - 1 = 0 \quad (P)$$

2) la droite (D) passe par le point $B(3; 1; 0)$ et orthogonale au plan (P) donc : $\vec{n}(1; 2; 1)$ est un vecteur directeur à la droite (D)

Donc une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = 1k + 3 \\ y = 2k + 1 \\ z = 1k + 0 \end{cases} \text{ avec } (k \in \mathbb{R})$$

$$\text{Par suite : } B' \left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right)$$

Autre méthode :

L'équation d'un plan s'écrit sous forme :

$ax + by + cz + d = 0$ or $\vec{n}(1; 2; 1)$ est un vecteur normal à ce plan donc : $a = 1$ et $b = 1$ et $c = 1$

Donc L'équation devient : $1x + 2y + 1z + d = 0 \quad (P)$

Et on sait que le plan (P) passe par $A(-1; 0; 2)$

Donc : $(-1) + 2 \times 0 + 1 \times 2 + d = 0$ cad $d = -1$

Donc : $(P) \quad x + 2y + z - 1 = 0$

3) B' est la projection orthogonale de B sur le plan (P)

donc : $B' \in (D)$ et $B' \in (P)$

Donc B' est le point d'intersection de la droite (D)

Et le plan (P)

Donc les coordonnées de B' sont solutions du système :

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x = 1k + 3 \\ y = 2k + 1 \\ z = 1k + 0 \end{cases}$$

On remplace : x et y et z dans l'équation de (P)

On trouve : $k + 3 + 2(2k + 1) + k - 1 = 0$

Donc : $6k + 4 = 0$ Donc : $k = -\frac{2}{3}$

Donc : $x = -\frac{2}{3} + 3 = \frac{7}{3}$ et $y = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$ et $z = -\frac{2}{3} + 0 = -\frac{2}{3}$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie dans l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

6) Position relative de deux plans dans l'espace

Proposition : Soient : $(P) : ax + by + cz + d = 0$

et $(P') : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans dans l'espace

et $\vec{n}(a; b; c)$ et $\vec{n'}(a'; b'; c')$ deux vecteurs normaux

respectivement à (P) et (P')

1) Les plans (P) et (P') sont parallèles ssi $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires

2) Les plans (P) et (P') sont sécants ssi $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont non colinéaires

3) Les plans (P) et (P') sont perpendiculaires ssi $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux

Exemple : On considère les plans d'équations :

$$(P) \quad 2x - 4y + z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad (P') \quad x + y + 2z - 3 = 0$$

1) Montrer que : $(P) \perp (P')$

2) Déterminer l'équation cartésienne du plan (Q) parallèle

au plan (P) passant par le point $A(1; -1; 1)$

Solutions : 1) $\vec{n}(2; -4; 1)$ et $\vec{n'}(1; 1; 2)$ les deux vecteurs normaux respectivement de (P) et (P')

$$\text{On a : } \vec{n} \cdot \vec{n'} = 2 - 4 + 2 = 0$$

Donc $\vec{n} \perp \vec{n'}$ par suite : $(P) \perp (P')$

2) $(P) \parallel (Q)$ et $\vec{n}$ est normal à (P) donc $\vec{n}(2; -4; 1)$ est un vecteur normal à (Q)

Donc une équation cartésienne du plan (Q) est :

$$2x - 4y + z + d = 0$$

Et puisque : $A(1; -1; 1) \in (Q)$ donc :

$$2 + 4 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7$$

$$\text{Donc : } (Q) : 2x - 4y + z - 7 = 0$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie dans l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

7) Distance d'un point à un plan

Proposition : Soient : $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $(P) : ax + by + cz + d = 0$ un plan dans l'espace avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ et H est le projeté orthogonal de A sur le plan

la distance du point A au plan (P) est la

distance AH et on a : $d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Exemple : On considère le plan (P) d'équations :

$$x + 2y + 2z - 6 = 0 \text{ et le point } A(5; 1; 0)$$

Calculer la distance du point A au plan (P) .

$$\text{Solution : } d(A; (P)) = \frac{|5 + 2 \times 1 + 2 \times 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|1|}{3} = \frac{1}{3}$$

Exercice 5 : L'espace est muni d'un repère orthonormé

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère le plan (P) d'équation

$$x + 2y - z - 1 = 0$$

1) Les points A(1; 1; 2) et B(2; 1; 1) appartiennent-ils au plan (P) ?

2) Calculer la distance AB puis les distances de ces deux points A et B au plan (P) .

Solution : $1 + 2 \times 1 - 2 - 1 = 0$ donc les coordonnées du point A vérifient l'équation de.

On en déduit que A appartient au plan (P)

et donc que $2 + 2 \times 1 - 1 - 1 = 2 \neq 0$

donc les coordonnées du point B ne vérifient pas l'équation

de (P) On en déduit que B n'est pas un point de (P) .

$$2) AB = \sqrt{(2-1)^2 + 1(2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$$

Calculons $d(A; (P))$ et $d(B; (P))$.

On a : $A \in (P)$ donc $d(A; (P)) = 0$

$$d(B; (P)) = \frac{|2 + 2 \times 1 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

on a : $\overrightarrow{AB}(1; 0; -1)$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie dans l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

8) Etude analytique de la sphère

1- Equation cartésienne d'une sphère.

Soit $\Omega(a, b, c)$ un point dans l'espace et $r \geq 0$
 $M(x, y, z) \in S(\Omega, R) \Leftrightarrow \Omega M = R$
 $\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$
 $\Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$

Exemple : 1) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(1, -1, 2)$ et de rayon $R = 3$

2) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(0, -3, 0)$ et qui passe par $A(2, 1, -1)$.

Solution : 1) l'équation cartésienne de la sphère est :

$$(x-1)^2 + (y-(-1))^2 + (z-2)^2 = 3^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$$

2) $S(\Omega, R)$ la sphère de centre $\Omega(1, -2, 0)$ et qui passe par $A(2, 1, -1)$.

$$\text{Donc : } \Omega A = R = \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 + (z_A - z_\Omega)^2}$$

$$R = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

Donc l'équation cartésienne de la sphère est :

$$(x-0)^2 + (y-(-3))^2 + (z-0)^2 = \sqrt{21}^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (y+3)^2 + z^2 = 21 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 12 = 0$$

Propriété 2 : Soient : $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace

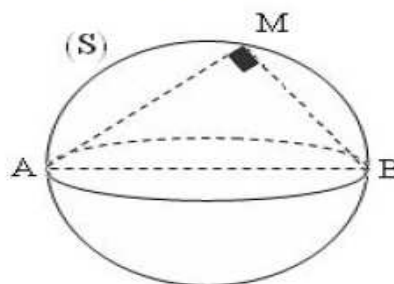
L'ensemble des points

$M(x; y; z)$ de l'espace tel

que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$

Et d'équation cartésienne :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$



Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie dans l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

2- Intersection d'une droite et une sphère.

Proposition : Soient (D) une droite de l'espace et (S) une sphère de centre O et de rayon R , H le projeté orthogonal du point O sur la droite (D) .

Notons $d = OH$:

- Si $d > R$ alors la droite (D) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.
- Si $d = R$ alors la droite (D) et la sphère (S) ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que la droite (D) est tangente en H à (S)
- Si $d < R$ alors la droite (D) et la sphère (S) en deux points en commun A et B symétriques par rapport au point H , dans ce cas on dit que la droite (D) est sécante à (S) . ($OA = OB = R$)

9) équations paramétriques

Soit une droite d passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$, on appelle **représentation paramétrique** de la droite d , le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Le vecteur (a, b, c) est directeur de la droite

Démonstration ...écrire que pour tout point M de la droite les deux vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaire

Soit un plan $\mathcal{P}$ passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(\alpha, \beta, \gamma)$, on appelle **représentation paramétrique** du plan $\mathcal{P}$, le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = x_A + at + \alpha s \\ y = y_A + bt + \beta s \\ z = z_A + ct + \gamma s \end{cases} \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

Démonstration ...écrire que pour tout point M du plan le vecteur $\vec{AM}$ est écrit de façon unique en fonction des vecteurs directeurs du plan.

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie dans l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Cas de figures

Montrer que deux droites sont sécantes à partir de leurs équations paramétriques revient à trouver des valeurs uniques pour les deux paramètres en égalisant les deux équations paramétriques.

Si vous trouvez des valeurs différentes pour un des paramètres alors les deux droites ne sont pas coplanaires.

Exercice

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(1, 0, 1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

Il y a plusieurs méthodes, la plus rapide étant de remarquer que $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Les coordonnées de $\vec{n}$ sont $(1, -1, 1)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\iff 1(x-1) - 1(y-0) + 1(z-1) = 0 \\ &\iff x - y + z - 2 = 0. \end{aligned}$$

Exercice

1. Donner une équation cartésienne du plan de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2u \\ y = 2 + t + u \\ z = 3u \end{cases}, (t, u) \in \mathbb{R}^2$$

Indication=> déchiffrez les coordonnées de A puis des deux vecteurs directeurs et faire le produit vectoriel pour trouver le vecteur normal.

2. Donner une représentation paramétrique du plan d'équation $x + 2y - z - 3 = 0$.

Indication=> Il suffit de choisir deux coordonnées comme paramètres

$$\begin{cases} x = -2t + u + 3 \\ y = t \\ z = u. \end{cases}$$

3. Donner un système d'équations définissant la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 4t + 5 \\ y = 3t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Indication=> Exprimer t en fonction de Z dans la dernière équation, et remplacer dans les deux autres.

3. La dernière équation donne $t = z - 3$. On remplace dans les deux autres pour trouver un système d'équations :

$$\begin{cases} x = 4z - 7 \\ y = 3z - 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 4z + 7 = 0 \\ y - 3z + 8 = 0. \end{cases}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie dans l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

10) produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur

Donc il faut chercher sa norme, sa direction et son sens.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}_3$.

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est tel que :

$\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$ et la base $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est directe

Et $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = \theta$

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

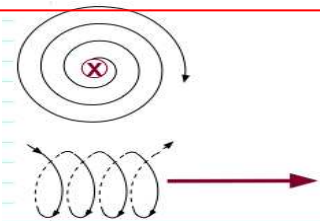
$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$$

$$(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v})$$

$(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est directe

Cela veut dire que si je ramène le premier sur le deuxième j'obtiens le troisième

C'est la règle du tirebouchon



Expression analytique du produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{u'} = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{u'} = (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - zx')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

Démonstration

$$\vec{u} \wedge \vec{u'} = (xi + yj + zk) \wedge (x'i + y'j + z'k)$$

Puis utiliser les règles de distributivité

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie dans l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Application à la surface d'un triangle

Soient A, B et C trois point non alignés, la surface du triangle ABC est :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

Démonstration : écrire l'expression de la surface du triangle ABC en utilisant la hauteur issue de C

Exemple1 : $\vec{u}(1;1;1)$ et $\vec{v}(2;1;2)$ deux vecteurs:

Calculer : $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

Alignement de 3 points

A, B et C trois points dans l'espace, A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires autrement dit

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

Equation d'un plan

A, B et C trois points du plan non alignés. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan.

$$M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

Cette équation permet d'obtenir l'équation cartésienne du plan

Exemple : dans l'espace muni d'un repère orthonormée directe $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ on considère les

points $A(0;1;2)$ et $B(1;1;0)$ et $C(1;0;1)$

1) Déterminer les coordonnées du vecteur

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et vérifier que les points

A et B et C sont non alignés

2) Calculer la surface du triangle ABC

3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie dans l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Solution :1) $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$\overrightarrow{AB}(1;0;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-1;-1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ Donc les points A et B et C sont non alignés

$$2) S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Donc : } S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

3) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$ un vecteur normal du plan ABC

Donc une équation cartésienne du plan ABC est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-2;-1;-1)$ donc $a = -2$ et $b = -1$ et $c = -1$

$$\text{Donc : } -2x - 1y - 1z + d = 0 \quad (ABC)$$

Et on a : $A(0;1;2) \in (P)$ donc : $0 - 1 - 2 + d = 0$

donc $d = 3$

$$\text{Donc } (ABC) : -2x - 1y - 1z + 3 = 0$$

$$\text{Donc } (ABC) : 2x + y + z - 3 = 0$$

Distance d'un point à une droite



$$d(M; (D)) = MH = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{AB}$$

Démonstration : écrire l'expression du produit vectoriel $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$