

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Limites et Continuité

I) LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

1- Rappels

P et Q deux fonction polynôme $x_0 \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}^*$

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \text{ si } x_0 \geq 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ si } Q(x_0) \neq 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad 4) \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0 \text{ si } x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

2) Exercices (Révision et mise à niveau)

Exercice1 : Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 1}{2x - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

Solutions : 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 1}{2x - 1} = \frac{3}{1} = 3$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$?

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

on trouve une formes indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \text{ or } x \rightarrow +\infty \text{ donc } |x| = x$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \quad \text{On pose } x - \frac{\pi}{4} = h$$

$$\text{donc } x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan \left(h + \frac{\pi}{4} \right)}{h}$$

$$\text{or : } \tan \left(h + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$

Exercice2 : (Limites à droite et à gauche)

$$\text{Soit la fonction } f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2 - 1|}$$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$

Solution : Déterminons $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$?

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$\text{Si : } -1 < x < 1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -\frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{Si : } x < -1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = 0 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Exercice3 : Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x) \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ et } h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

1) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1=5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} -3x^2+x=-10$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2+x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2+1=1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$$

$$4) k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ donc : } D_k =]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$\bullet \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ? \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\bullet \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} g(x) ? \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}+1 = \sqrt{3}+1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} -2x^2+1 = -17 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+ \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} -3x+1 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2-2x = 0$$

Etude du signe de : $x^2 - 2x$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$x(x-2)$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2-2x = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2-2x = 0^+$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -3x+1 = -5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2-2x = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2-2x = 0^-$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = +\infty$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

II) CONTINUITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de centre a . On dit que la fonction f est continue en a si elle admet une limite finie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Exemple

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}; \text{ si } x \neq 3 \text{ et } f(3) = 7$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$

Solution : on a : $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = x + 4$ D.EC

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} x + 4 = 7 = f(3)$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

Donc : f est continue en $x_0 = 3$

Exercice

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\tan x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

Solution :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} + 1) \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = 1 \times \frac{1}{2} = f(0)$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Donc : f est continue en $x_0 = 0$

Exercice

$$f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 2x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \text{ et } f(2) = \frac{1}{2}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

Solution : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = \frac{1}{2} = f(2)$ Alors

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ Donc : f est continue en $x_0 = 2$

Exercice

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1}; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases}$$

avec m paramètre réel

déterminer la valeur du réel m pour laquelle

f est continue en $x_0 = 1$

Indication = " changement de variable "

Solution : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

on pose : $h = x-1$ $x \rightarrow 1 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(h+1))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi h + \pi)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi h)}{\pi h} \pi = -\pi$$

donc f est continue en $x_0 = 1$ ssi $m = -\pi$

Exercice

$$f(x) = 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right); \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 2$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

Solution : $x \in \mathbb{R}^* \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$ donc :

$$\left| f(x) - 2 \right| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2 \text{ et on a } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0)$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Définition

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$

On dit que la fonction f est continue à droite de a si elle admet une limite finie à droite en a

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - r, a]$ où $r > 0$

On dit que la fonction f est continue à gauche de a si elle admet une limite finie à gauche en a

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Exemple : Soit f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2; \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 1}; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f à droite et à gauche de $x_0 = 0$

$$\textbf{Solution} : \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 3}{2x - 1} = 3 = f(0)$$

donc f est continue à droite de $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3 - x^2 = 3 = f(0)$$

donc f est continue à gauche de $x_0 = 0$

Théorème : Une fonction est continue en un point a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a

Donc : f est continue en $x_0 = 0$ ssi

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Exemple1 : Considérons la fonction f définie

$$\text{Par : } \begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{7-3x}; \text{ si } x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}; \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

Solution : on a : $f(2) = \frac{2 \times 2 + 1}{7 - 3 \times 2} = \frac{5}{7 - 3 \times 2} = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 3 = 5 = f(2)$$

Donc f est continue adroite de f en $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{7-3x} = \frac{5}{1} = 5 = f(2)$$

Donc f est continue gauche en $x_0 = 2$

Donc f est continue en $x_0 = 2$

Exemple2: Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-1}{|x-1|}$ si $x \neq 1$

Et : $f(1) = 2$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x+1 = 2 = f(1)$$

donc f est continue à droite de $x_0 = 1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -(x+1) = -2 \neq f(1)$$

donc f n'est pas continue à gauche de $x_0 = 1$

donc f n'est pas continue en $x_0 = 1$

On dit que f est discontinue en $x_0 = 1$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Prolongement par continuité

Théorème et définition : Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f ; a un réel tel que $a \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ (finie)

La fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq a \\ f(a) = l \end{cases}$$

Est une fonction continue en a et s'appelle un prolongement par continuité de la fonction f en a

Exemple : Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \quad \text{Donner un prolongement par}$$

continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

Solution :
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times x = 0$$

Car :
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Donc La fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Est une prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

f une fonction D_f son domaine de définition
soit $]a, b[$ un intervalle inclus dans D_f

Définition

- 1) On dit que f est continue sur l'ouvert $]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$
- 2) On dit que f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a
- 3) On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Propriétés : 1) Si f et g sont deux fonctions continues en a alors :

a) $f + g$ b) $f \times g$ c) $|f|$

Sont des fonctions continues en a

2) Si f et g sont deux fonctions continues en a et $g(a) \neq 0$ alors

a) $\frac{1}{g}$ b) $\frac{f}{g}$ sont des fonctions continues en a .

3) Si f une fonction continue en a et $f(a) \geq 0$ alors : $\sqrt{f}$ est continue en a

Propriétés : 1) Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$

2) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$

3) La fonction $\tan$ est continue sur tous les intervalles de la forme : $]-\pi/2 + k\pi ; \pi/2 + k\pi[$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

Continuité de la composition de deux fonctions

Théorème : Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que $f(I) \subset J$ et x_0 un élément de I .

1) Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

2) Si f est continue sur I et g continue en $f(I)$ alors $g \circ f$ est continue sur I .

Exemples

1) Soit f une fonction définie par $f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$
Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$

Puisque les fonctions : $f_1 : x \rightarrow 2x^2 - 3x + 4$ et

$f_2 : x \rightarrow \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Et $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ alors : $f = f_2 \circ f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

2) Soit g une fonction définie par

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{1 + \sin^2 x}}$$

Montrons que g est continue sur $\mathbb{R}^+$

On a : $D_g = [0; +\infty[$ et Puisque la fonction :

$$g_1 : x \rightarrow \frac{x}{1 + \sin^2 x} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+ \text{ et}$$

$$g_1(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+ \text{ et } g_2 : x \rightarrow \sqrt{x} \text{ sont continue sur } \mathbb{R}^+$$

Donc : $g = g_2 \circ g_1$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

Limites des fonctions composées

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 telle $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$
si v est continue en l alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = v(l)$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \pi\right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

Solution : 1)

$$\text{Soient : } f : x \rightarrow \frac{1 - \cos x}{x^2} \pi \text{ et } g : x \rightarrow \sin x$$

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \pi = \frac{\pi}{2} \text{ } g \text{ est continue sur } \mathbb{R}$$

Donc continue en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$2) \text{ puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \pi \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}} = \pi$$

Et la fonction : $x \rightarrow \cos x$ continue en π

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) = \cos \pi = -1$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Exercice

Déterminer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}}$$

Solution : 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \tan x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{3} \frac{\tan x}{x} = \frac{\pi}{3}$

et Puisque : $x \rightarrow \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0 = \frac{\pi}{3}$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2}{4x^2} = \frac{\pi}{4}$$

et Puisque : $x \rightarrow \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc continue en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ donc :

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3) \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{0} \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x^2}{1 - \cos x} = 4$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}} = 2 : x \rightarrow \sqrt{x} \text{ est continue en } 4$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}} = \sin 2 \text{ car : } x \rightarrow \sin x \text{ est}$$

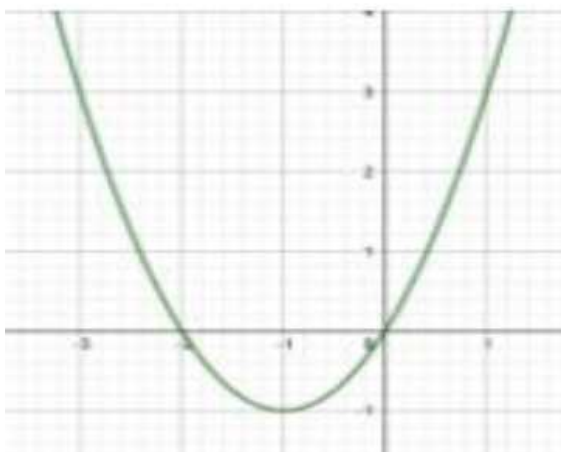
continue en 2

IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

Activité : Le graphe ci-contre est le graphe de la

fonction $f(x) = x^2 + 2x$



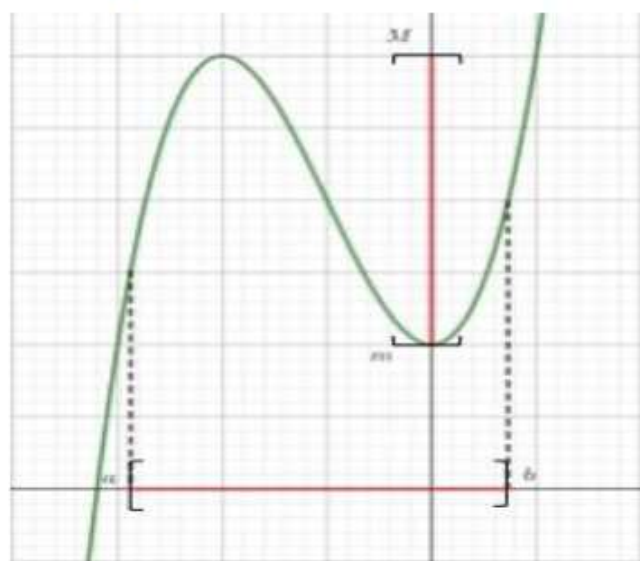
Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Déterminer graphiquement les images des intervalles : $I_1 = [0,1]$, $I_2 = [-3,-1]$; $I_3 = [-3,1]$

Théorème : (Admis)

L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est le segment $[m, M]$ où :

$$m = \min_{x \in [a; b]} f(x) \text{ et } M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$$



Cas particulier :

- 1) Si f est continue croissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
- 2) Si f est continue décroissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

2) Image d'un intervalle

Théorème général

Théorème (admis) : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Cas d'une fonction strictement monotone

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

1) f continue et strictement croissante sur
L'intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$

$$f([a;b]) = [f(a); f(b)] \text{ et } f([a;b[) = \left[f(a); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$$

$$f(]a;b]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); f(b) \right] \text{ et } f(]a;b[) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$$

2) f continue et strictement décroissante sur
L'intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$

$$f([a;b]) = [f(b); f(a)] \text{ et } f([a;b[) = \left[\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x); f(a) \right[$$

$$f(]a;b]) = \left] f(b); \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right] \text{ et } f(]a;b[) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right[$$

Exemple : Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

Déterminer les images des intervalles suivants :

$[0,1]$; $[-2,-1[$; $] -1, 1]$; $[2, +\infty[$

Solution : $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+3=5 > 0 \text{ donc : } f \text{ continue et}$$

strictement croissante sur les intervalles $] -\infty; -1[$

$$\text{et }]-1; +\infty[\text{ donc on a : } f([0;1]) = [f(0); f(1)] = \left[-3; \frac{-1}{2}\right]$$

$$f([-2;-1[) = \left[f(-2); \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) \right[= [7; +\infty[$$

$$f(]-1;1]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x); f(1) \right] = \left] -\infty; \frac{-1}{2} \right]$$

$$f([2; +\infty[) = \left[f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= \left[\frac{1}{3}; 2 \right[$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERES

1) Cas général

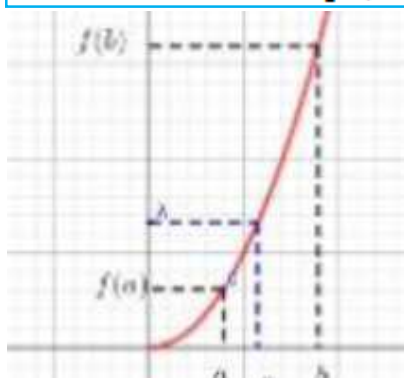
Théorème T.V.I : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$

2) Cas f strictement monotone.

Théorème T.V.I (cas f strictement monotone)

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$.

Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$



3) Corolaires

Corolaire1 (T.V.I) : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Corolaire2 (T.V.I) :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe un et un seul c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$

4) Applications

Exemple1 : Montrer que l'équation :

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0 \text{ admet une racine dans chacune}$$

des intervalles suivants : $\left]-1; -\frac{1}{2}\right[$; $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$ et $]0; 1[$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Solution : on considère la fonction : g tel que

$$g(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$$

• On a : g est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$

○ Et on a : $g(-1) = -\frac{3}{2}$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ donc :

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(-1) < 0 \text{ donc : d'après le (T.V.I)}$$

il existe $\alpha_1 \in \left]-1; -\frac{1}{2}\right[$ tel que : $g(\alpha_1) = 0$

○ Et on a : $g(0) = -\frac{1}{2}$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ donc :

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(0) < 0 \text{ donc : d'après le (T.V.I)}$$

il existe $\alpha_2 \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right[$ tel que : $g(\alpha_2) = 0$

○ Et on a : $g(0) = -\frac{1}{2}$ et $g(1) = \frac{1}{2}$ donc :

$$g(1) \times g(0) < 0 \text{ donc : d'après le (T.V.I)}$$

il existe $\alpha_3 \in]0; 1[$ tel que : $g(\alpha_3) = 0$

donc l'équation : $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ admet 3 racines

différentes dans chacune des intervalles :

$$\left]-1; -\frac{1}{2}\right[; \left]-\frac{1}{2}; 0\right[\text{ et }]0; 1[$$

Exemple2 : Montrer que l'équation : $x^3 + x + 1 = 0$

Admet une racine unique dans $]-1; 0[$

Solution : on considère la fonction : f tel que

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

• On a : f est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur $]-1; 0[$

• on a : $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$ donc :

$$f(1) \times f(-1) < 0$$

• $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur $]-1; 0[$ donc f strictement croissante sur $]-1; 0[$

Donc : d'après le (T.V.I) l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-1; 0[$

Exercice9 : Montrer que l'équation : $\cos x = x$

Admet au moins une racine dans l'intervalle :

$$I = [0; \pi]$$

Solution : $\cos x = x \Leftrightarrow \cos x - x = 0$

On pose : $f(x) = \cos x - x$

• On a : f est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $I = [0; \pi]$

• on a : $f(\pi) = -1 - \pi < 0$ et $f(0) = 1$ donc :

$$f(0) \times f(\pi) < 0$$

Donc : d'après le (T.V.I)

il existe $\alpha \in]0; \pi[$ tel que : $f(\alpha) = 0$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Exercice10 : Montrer que l'équation : $1 + \sin x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$$I = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$$

Solution : $1 + \sin x = x \Leftrightarrow 1 + \sin x - x = 0$

On pose : $f(x) = 1 + \sin x - x$

- On a : f est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc

continue sur $I = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$

- on a : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4-\pi}{2} > 0$ et

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6+3\sqrt{3}-4\pi}{6} < 0 \text{ donc : } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \times f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$$

Donc : d'après le **(T.V.I)**

il existe $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$ tel que : $f(\alpha) = 0$

VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

1) Le théorème

Théorème : Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I , On a f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $J = f(I)$ vers I .

donc f est une bijection de I vers $f(I)$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I et on a :

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in f(I)$$

$$(f^{-1} \circ f)(y) = y \quad \forall y \in I$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

2) Application

Exemple1 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

1) Montrer que la fonction g la restriction de f sur intervalle $I =]-2; +\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

Solution : 1) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)' = \frac{(x-3)'(x+2) - (x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1(x+2) - 1 \times (x-3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

puisque g est strictement croissante et continue sur : $I =]-2; +\infty[$

donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = g(I) = g(]-2; +\infty[) =]-\infty; 1[$

$$2) \begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in g(I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in]-2; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \frac{y-3}{y+2} = x \Leftrightarrow y-3 = x(y+2)$$

$$\Leftrightarrow y - xy = 2x + 3 \Leftrightarrow y(1-x) = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x+3}{1-x} \text{ Donc } g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$$

$$g^{-1} :]-\infty; 1[\rightarrow]-2; +\infty[$$

Donc : $x \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$

Exercice 12: Soit f la fonction définie sur

$$I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ par : } f(x) = \sqrt{2x-1}$$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

3) Représenter (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même

repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Solution : 1) $D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[= I$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\quad f'(x) = (\sqrt{2x-1})' = \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$$

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$



Donc : f est strictement croissante et continue

sur : $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[= I$

donc f admet une fonction réciproque f^{-1}

définie sur $J = f(I) = f\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\right) = [0; +\infty[$

$$2) \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

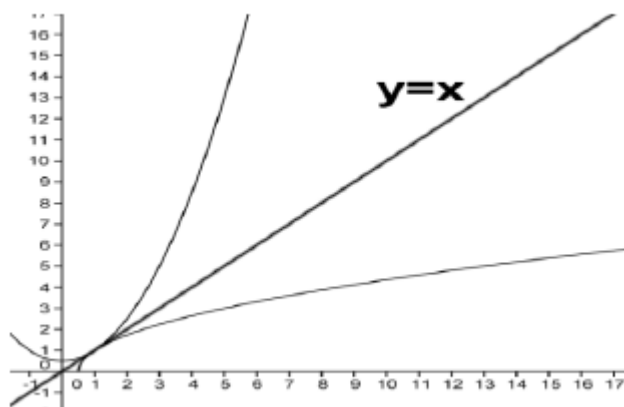
$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in [0; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2y-1} = x \Leftrightarrow 2y-1 = x^2$$

$$\Leftrightarrow 2y = x^2 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 1}{2}$$

$$\text{Donc } f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$$

Donc : $f^{-1}: [0; +\infty[\rightarrow \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$
 $x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$

3) $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à $(\Delta) y = x$



3) Propriété de la fonction réciproque

Propriété 1 : Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} a la même monotonie sur J que celle de f sur I .

Preuve :

$$T_{f^{-1}} = \frac{f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{f(x_1) - f(x_2)}$$

$$T_{f^{-1}} = \frac{1}{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{y_1 - y_2}}$$

Donc le taux de f^{-1} sur J a le même signe que le taux de f sur I
Et on conclut.

Propriété 2 : Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à $(\Delta) y = x$

4) La fonction racine n - éme

4.1 Définition et règles de calculs

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; la fonction :

$f: x \rightarrow x^n$ est une fonction continue strictement

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

croissante sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction f^{-1} de $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$

La fonction réciproque f^{-1} s'appelle la fonction racine n - ème et se note $\sqrt[n]{x}$

1) La fonction $\sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt[n]{x} \geq 0$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

4) La fonction $\sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ strictement croissante.

5) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$

6) $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall a \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n$

7) $(\forall a \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n$

8) $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$

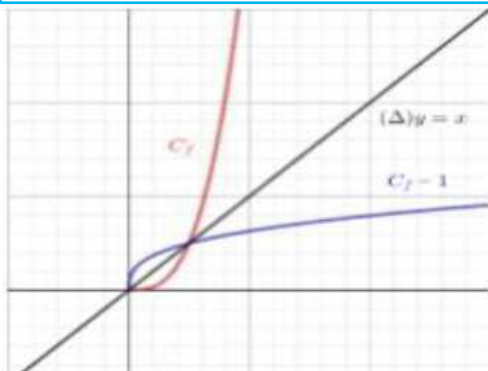
9) $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall p \in \mathbb{N}) \quad (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

11) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

12) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$ et $l \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

13) La courbe de la fonction $\sqrt[n]{x}$



Règle de calcul

1) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \quad \sqrt[n]{x \times y} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}) \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n \times p]{x}$

4) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times p]{x^p}$

4.2 Résolution de l'équation $x^n = a$

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^5 = 32$ 2) $x^7 = -128$ 3) $x^4 = 3$ 4) $x^6 = -8$

Solutions :1) $x^5 = 32$ donc $x > 0$

$x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2^5} \Leftrightarrow x = 2$ donc : $S = \{2\}$

2) $x^7 = -128$ donc $x < 0$

Donc : $x = -\sqrt[7]{128} \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{2^7} \Leftrightarrow x = -2$

Donc : $S = \{-2\}$

3) $x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{3}$ ou $x = -\sqrt[4]{3}$

Donc : $S = \{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\}$

4) $x^6 = -8$

On a $x^6 \geq 0$ et $-8 < 0$ donc $S = \emptyset$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International SM

Exercices d'applications

Exercice 13 : simplifier les expressions

1) $(\sqrt[3]{2})^3$ 2) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$

3) $A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

4) $B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

Solutions : 1) $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$ 2) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[2 \times 4]{2} = \sqrt[8]{2}$

2) $A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{2^5} - 2 + \sqrt[3]{2^9} + \sqrt[5]{\frac{96}{3}}$

$A = 2 - 2 + \sqrt[3]{2^9} + \sqrt[5]{32} = 2 - 2 + 2 + 2 = 4$

3) $B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[4]{4} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2^4} \times \sqrt[4]{2^2} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{2^8}}$

4)

$$B = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{2}{4}} \times 2^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[15]{2^8}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = \frac{2^{\frac{23}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = 2^{\frac{23-8}{15}} = 2^{\frac{15}{15}} = 2$$

Exercice 14 : comparer : $\sqrt[5]{2}$ et $\sqrt[7]{3}$

Solutions : on a : $\sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x}$

$\sqrt[7]{3} = \sqrt[7 \times 5]{3^5} = \sqrt[35]{243}$ et $\sqrt[5]{2} = \sqrt[5 \times 7]{2^7} = \sqrt[35]{128}$

On a : $\sqrt[35]{243} > \sqrt[35]{128}$ car $243 > 128$

Donc : $\sqrt[7]{3} > \sqrt[5]{2}$

Exercice 15 : résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt[5]{3x-4} = 2$ 2) $(\sqrt[3]{x})^2 - 5\sqrt[3]{x} + 6 = 0$