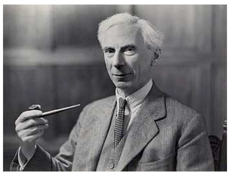
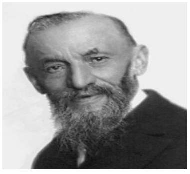
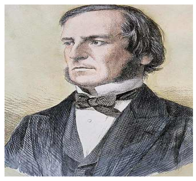
Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Logique mathématique (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1ère et 2ème Bac International SM

Logique mathématique

La logique mathématique est une discipline inventée à la fin du XIXe siècle, qui s'est donné comme objet l'étude des mathématiques en tant que langage. Parmi les mathématiciens qui ont contribué au développement de cette discipline on site: Gottlob Frege, Bertrand Russell, Giuseppe Peano, David Hilbert, George Boole…

1. PROPOSITION

Une proposition est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

2. OPERATIONS LOGIQUES

2-1) L'opérateur logique «et »

La proposition « P et Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie
On résume ceci en une table de vérité

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

Exemple

soient les propositions $P"\left(\sqrt{3} \geq 1\right)$ et $Q"\left(\left|-\sqrt{3}\right| = -\sqrt{3}\right)$

La proposition "$P \; et \; Q$" est fausse car Q est fausse

2-2) L'opérateur logique « ou »

La proposition « P ou Q » est vraie si l'une (au m oins) des deux propositions P ou Q est vraie

$P \setminus Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

Il suffit que l'une des propositions soit vraie pour que « P ou Q » soit vraie

Exemple

soient les propositions $P"\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ et $Q"\left(\left|-\sqrt{3}\right|=-\sqrt{3}\right)$

La proposition "P ou Q" est vraie car P est vraie

2-3) La négation « non »

La proposition « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

On note $\overline{P}$ la négation de La proposition P

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

2-3) L'implication ⇒

La proposition « (non P) ou Q » est notée « P ⇒ Q ».

p	q	$(p \Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Mémoriser cette proposition « P ⇒ Q » comme étant fausse seulement quand P vraie et Q fausse

Par exemple :

1)$"0\leq 1"\Rightarrow"\sqrt{2}=1"$ est fausse

2)$"1+2=4"\Rightarrow"\sqrt{2}=-1"$ est vraie

2-4) L'équivalence ⇔

L'équivalence est définit par : « P ⇔ Q » est La proposition «(P ⇒ Q) et (Q ⇒ P)»

On dira « P est équivalent à Q » ou « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ». Cette proposition est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. La table de vérité est :

Mémoriser cette proposition « P ⇔ Q » comme étant fausse seulement quand l'une est fausse

p	q	$(p \Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemples :

1) $"0 \leq -1" \Leftrightarrow "\sqrt{2} = 1"$ est vraie

2) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$ l'équivalence $x \times x' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x' = 0$ est vraie.

2-5) Loi logique ou une tautologie.

Définition :

On appelle une loi logique toute proposition constitué par des propositions liées entre elles par des connexions logiques est qui est toujours vraie quel que soit la valeur de vérité des propositions qui la constituent.
Une loi logique s'appelle aussi une tautologie.

1) P $\Leftrightarrow$ non(non(P))
2. (P et Q) $\Leftrightarrow$ (Q et P)
3. (P ou Q) $\Leftrightarrow$ (Q ou P)
4. non(P et Q) $\Leftrightarrow$ (non P) ou (non Q)
5. non(P ou Q) $\Leftrightarrow$ (non P) et (non Q)
6. P et (Q ou R) $\Leftrightarrow$ (P et Q) ou (P et R)
7. P ou (Q et R) $\Leftrightarrow$ (P ou Q) et (P ou R)
8. « P $\Rightarrow$ Q » $\Leftrightarrow$ «non(Q) $\Rightarrow$ non(P)»

3. Quantificateurs et fonction propositionnelle

Si une proposition P dépend d'un paramètre x on l'appelle fonction propositionnelle

Définition :

Une fonction propositionnelle sur un ensemble E est une expression contenant une ou plusieurs variables Libres dans E et qui est susceptible de devenir une proposition vraie ou fausse si l'on attribue à ces variables certaines valeurs particulières de l'ensemble E

La proposition « $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ » est une proposition vraie

3.1 Le Quantificateurs ∀: «pour tout» :

On lit « Pour tout x appartenant à E, P(x) »

Exemples :

« $\forall x \in [1;+\infty[: x^2 \geq 1$)» est une proposition vraie.

« $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$)»est une proposition fausse.

« $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$)»est divisible par 2» est vraie.

3.2 Le Quantificateurs ∃: «il existe»

On lit «il existe x appartenant à E tel que P(x) …

« $\exists x \in \mathbb{R} : x(x-1) \geq 0$)» est vraie

« $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 - n \geq n$)»est vraie

« $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$)» est fausse

3.3 La négation des Quantificateurs

La négation de « $\forall x \in E : P(x)$)»est « $\exists x \in E : \overline{P(x)}$ ».

La négation de « $\exists x \in E : P(x)$)»est « $\forall x \in E : \overline{P(x)}$ ».

Exemples :

1)La négation de « $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$)»est La proposition $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \prec 1$

En effet la négation de $x^2 \geq 1$ est non($x^2 \geq 1$) mais s'écrit plus simplement $x^2 \prec 1$.

2)La négation de « $\forall x \in \mathbb{R} : x+1 \in \mathbb{Z}$)»est « $\exists x \in \mathbb{R} : x+1 \notin \mathbb{Z}$)»

3)La négation de « $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$)»est « $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1$)»

Remarques

L'ordre des Quantificateurs est très important..
Comparant les deux propositions

« $\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R} : x+y \geq 0$ » $\exists x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R} : x+y \geq 0$

- La première signifie que pour n'importe quel "x" vous trouverez surement un "y" qui satisfait la condition. Cette proposition est vraie
- La deuxième dit que il existe un "x" qui satisfait la condition quel que soit
- la valeur de "y". c'est faux

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Logique mathématique (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / $1^{ère}$ et $2^{ème}$ Bac International SM

Exercice1

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1) $P:$ "$\forall x \in \mathbb{R} / x^2 > 0$"

2) $P:$ "$\exists x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 = 0$"

3) $P: x \in [1;2[$

4) $P:$" $\forall n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$"

5) $P: (\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos x \leq 1$

6) $P: (\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}): n \prec m$

7) $P: (\exists n \in \mathbb{N})\ 2n+1$ est pair

8) $P: (\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$

Réponse

1) $\overline{P}:$ "$\exists x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 0$" et on a P: est fausse

2) $\overline{P}$ "$\forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 \neq 0$" et on a P: est vraie

3) $\overline{P}$: $x \notin [1;2[$

4) $\overline{P}$ $\exists n \in \mathbb{N} / \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$" et on a P: est fausse

5) $\overline{P}$ $(\exists x \in \mathbb{R}); \cos x \succ 1$ ou $\cos x \prec -1$ et on a P: est vraie

6) $\overline{P}$ $(\exists n \in \mathbb{N}); (\forall m \in \mathbb{N}): n \geq m$ et on a P: est vraie

7) $\overline{P}$ $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2n+1$ est impair P: est fausse

8) $\overline{P}$ $(\exists n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ et on a P: est vraie

Exercice 2

Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.

6; Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Solution :

1. "$\forall x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 0$"
2. "$\exists x \in \mathbb{R}, x \succ x^2$ "
3. $(\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}): n \prec m$
4. $(\exists x \in \mathbb{R}): (\forall n \in \mathbb{Z}): (\forall m \in \mathbb{N}^*): x \neq \frac{n}{m}$
5. $(\exists n \in \mathbb{N}); (\forall m \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}): n = m \times k$
6. $(\forall x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) / x \prec y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} / x \prec z \prec y$

4. RAISONNEMENTS

4.1. Raisonnement direct :

On veut montrer que La proposition « P $\Rightarrow$ Q » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie

Exemple1 : $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $\begin{cases} 0 \leq x \prec 2 \\ 0 \leq y \prec 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ 1$

Solution : $\begin{cases} 0 \leq x \prec 2 \\ 0 \leq y \prec 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \succ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} \succ \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \succ 1$

Exemple2 : $x \in \mathbb{R}^+$ Montrer que : $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$

Exemple3 : 1) Montrer que : $\left(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2\right): a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$

2) $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ Montrer que: $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

Solution : 1) $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = -b^2 \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^-$

Or on sait que $a^2 \in \mathbb{R}^+$ donc $a^2 \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$ donc $a^2 = 0$ donc $a = 0$

Et puisque $a^2 + b^2 = 0$ alors $b = 0$

2) $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 + y - 2\sqrt{y} + 1 = 0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 0$ et $\sqrt{y} - 1 = 0$ d'apres1)

$\Rightarrow \sqrt{x} = 1$ et $\sqrt{y} = 1 \Rightarrow x = 1$ et $y = 1$

Donc : $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

Exemple4 : Montrer que : $\left(\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2\right): a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2}$

Solution

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 > 0$ or $a^2 + b^2 = 1$ $\Leftrightarrow$ $1 - 2ab > 0 \Leftrightarrow 2ab < 1$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow |a+b| = (a^2 + 2ab + b^2)^{1/2} = (1 + 2ab)^{1/2}$

$2ab < 1 \Leftrightarrow 1 + 2ab < 2 \Leftrightarrow (1 + 2ab)^{½} < \sqrt{2}$

Exemple5 : Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ alors $a+b \in \mathbb{Q}$

Solution : Prenons $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Alors $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$; De même $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$ donc

$a+b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{p \times q' + q \times p'}{q \times q'}$. Or le numérateur $p \times q' + q \times p'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur $q \times q'$ est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$ et $q'' \in \mathbb{N}^*$ Ainsi $a+b \in \mathbb{Q}$

Exemple7 : Montrer que : $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

Solution :
On a : $n \in \mathbb{N}$ donc $n+1 \prec n+2$
donc $0 \prec \frac{n+1}{n+2} \prec 1$ donc $\frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

Exemple8 : Montrer que pour tout $\forall x \in [-2;2] : 2\sqrt{2} \succ \sqrt{4-x^2}$.

Solution : l'inéquation est définie ssi voici le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_I = [-2;2]$

Soit $x \in [-2;2]$.

$$2\sqrt{2} - \sqrt{4-x^2} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}{2\sqrt{2} + \sqrt{4-x^2}} = \frac{8-4+x^2}{2\sqrt{2} + \sqrt{4-x^2}}$$

$$2\sqrt{2} - \sqrt{4-x^2} = \frac{4+x^2}{2\sqrt{2} + \sqrt{4-x^2}} \succ 0$$

donc $\forall x \in [-2;2] : 2\sqrt{2} \succ \sqrt{4-x^2}$

4.2. Raisonnement par disjonction des cas :

Si l'on souhaite vérifier une proposition P(x) pour tous les x dans un ensemble E, on montre La proposition pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A.
C'est la méthode de disjonction des cas ou méthode cas par cas.

Donc : Si on montre que les deux proposition $\overline{P} \Rightarrow Q$ et $P \Rightarrow Q$ sont vraies (et puisque la dernière proposition est une loi logique) on peut conclure que Q est vraie.

Application 1

Montrer que pour tout $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2 - x + |1$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : x >1 Alors|x−1|= x−1.

Calculons alors $(x^2-x+1)-(x-1) = x^2-x+1-x+1$

$(x^2-x+1)-(x-1) = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1 \geq 0$ Ainsi $x^2-x+1 \geq |x-1|$

Deuxième cas : x < 1. Alors|x−1|=−(x−1).

Nous obtenons $(x^2-x+1)+(x-1) = x^2-x+1+x-1 = x^2 \geq 0$.

Et donc $x^2-x+1 \geq |x-1|$

Conclusion : Dans tous les cas $x^2-x+1 \geq |x-1|$.

Application 2

résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1) : $|x-1|+2x-3 \geq 0$

Solution : soit S l'ensemble des solution de (1)

soit $x \in \mathbb{R}$: on va déterminer le signe de : $x-1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

si $x \in [1;+\infty[$ alors $|x-1| = x-1$

donc l'inéquation (1) devient : $x-1+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow 3x-4 \geq 0$

$3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$ donc : $S_1 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[\cap [1;+\infty[= \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

si $x \in]-\infty;1]$ alors $|x-1| = -(x-1) = -x+1$

donc l'inéquation (1) devient : $-x+1+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

donc $S_2 = [2;+\infty[\cap]-\infty;1] = \varnothing$

finalement : $S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Application 3

Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : soit $n \in \mathbb{N}$ on a 3 cas possibles seulement pour n

$n = 3k$ ou $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$

<u>1cas :</u> $n = 3k$

$n(n+1)(n+2) = 3k(3k+1)(3k+2) = 3k'$ Avec $k' = k(3k+1)(3k+2)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>2cas :</u> $n = 3k+1$

$n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3) = 3(3k+1)(3k+2)(k+1) = 3k'$

Avec $k' = (3k+1)(3k+2)(k+1)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>3cas :</u> $n = 3k+2$

$n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4) = 3k'$

Avec $k' = (3k+2)(k+1)(3k+4)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

4.3. Raisonnement par contraposition :

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :
La proposition « P ⇒ Q » est équivalente à « non(Q) ⇒ non(P) ».
Donc si l'on souhaite montrer La proposition « P ⇒ Q »
On montre en fait que non(Q) ⇒ non(P) est vraie.

Exemple 1 : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$

Solution : soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
Utilisons un Raisonnement par contraposition :
Montrons que : $2x + 2y - xy - 2 = 2 \Rightarrow x = 2$ ou $y = 2$
On a : $2x + 2y - xy - 2 = 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 4 = 0$
$\Rightarrow x(2-y) - 2(2-y) = 0 \Rightarrow (2-y)(x-2) = 0$
$\Rightarrow 2 - y = 0$ ou $x - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $x = 2$
Donc : $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$

Exemple 2 : $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -5$

Montrer que : $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$

Solution : soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
Utilisons un Raisonnement par contraposition :
Montrons que : : $\frac{x+2}{x+5} = 2 \Rightarrow x = -8$
On a : $\frac{x+2}{x+5} = 2 \Rightarrow x + 2 = 2(x+5)$
$\Rightarrow x + 2 = 2x + 10 \Rightarrow x = -8$
Donc : $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$

Exemple 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Solution : Nous supposons que n n'est pas pair
Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair
Comme n n'est pas pair il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$ avec $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$.
Et donc n^2 est impair.
Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

Exemple4 : $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

Montrer que : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

Solution : Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$??

On a : $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$

$\Rightarrow -2x = -2y \Rightarrow x = y$

Donc : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

4.4. <u>Raisonnement par l'absurde :</u>

Le raisonnement par l'absurde repose sur le principe suivant : pour montrer « P ⇒ Q » on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « P ⇒ Q » est vraie.

Exemple1 : Soient $a \succ 0$ et $b \succ 0$ Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$.

Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'où $a^2 - b^2 = b - a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$ Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par a−b on obtient : a+ b =−1. La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction. Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Exemple2 : Soit f la fonction numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \leq M$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre positif M tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \leq M$

$f(x) \leq M \Rightarrow x^2 + 2x \leq M \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \leq M + 1$

$\Rightarrow (x+1)^2 \leq M + 1 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2} \leq \sqrt{M+1} \Rightarrow |x+1| \leq \sqrt{M+1}$

$\Rightarrow -\sqrt{M+1} \leq x+1 \leq \sqrt{M+1} \Rightarrow -\sqrt{M+1} - 1 \leq x \leq \sqrt{M+1} - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Nous obtenons une contradiction car il suffit de prendre : $x = \sqrt{M+1}$

Donc notre supposition est fausse donc : il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \leq M$

Exemple3 : Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Solution : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Donc il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$; tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $a \wedge b = 1$

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = \left(b\sqrt{2}\right)^2$

$\Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ est pair $\Rightarrow a$ est pair

Et on a : $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2$

$\Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow b$ est pair

Donc on a : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a est pair et b est pair

Cad : $a \wedge b \neq 1$ Nous obtenons une contradiction

Donc notre supposition est fausse donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exemple4 (Contraposée ou absurde)

Soient $a;b \in \mathbb{Q}$

1)Montrer que : $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$

2)en déduire que : $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \Rightarrow a = a'$ et $b = b'$

Solution :1) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $b \neq 0$

$a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow b\sqrt{2} = -a \Rightarrow -\frac{a}{b} = \sqrt{2}$

Or $a;b \in \mathbb{Q}$ donc $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mais on sait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ Nous obtenons donc une contradiction

Donc $b = 0$ et puisque : $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = 0$

2) supposons que : $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$ donc $a - a' + b\sqrt{2} - b'\sqrt{2} = 0$

donc $a - a' + \sqrt{2}(b - b') = 0$ et d'après **1) on aura :** $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$

donc $a = a'$ et $b = b'$

4.5. <u>Raisonnement par Contre-exemple :</u>

Si l'on veut montrer qu'une proposition du type $\forall x \in E : P(x)$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que P(x) est vraie. Par contre pour montrer que cette proposition est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que P(x) soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à La proposition $\forall x \in E : P(x)$

Exemple1 : Montrer que La proposition $P : (\forall x \in [0;1]) : x^2 \geq x$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists x\in[0;1]):x^2\prec x$

On posant : $x=\frac{1}{2}$ on aura : $\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec\frac{1}{2}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple2 : Montrer que La proposition $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2+y^2\geq x+y$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x^2+y^2\prec x+y$

On posant : $x=1$ et $y=\frac{1}{2}$ on aura : $1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\prec 1+\frac{1}{2}$ c a d $\frac{5}{4}\prec\frac{6}{4}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple3 : Montrer que La proposition $P:\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:\left(\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2\right):\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$

On posant : $a=4$ et $b=3$ on aura : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ et $a+b=4+3=7$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

Exemple5 : Montrer que La proposition $P:\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right):x+\frac{1}{x}\geq 2$ est fausse :

Solution : sa négation est : $\overline{P}:\left(\exists x\in\mathbb{R}^*\right):x+\frac{1}{x}\prec 2$

On posant : $x=-1$ on aura : $-1+\frac{1}{-1}=-2\prec 2$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

4.6. Raisonnement par équivalence :

Le raisonnement par équivalence repose sur le principe suivant : pour montrer que P est vraie on montre que « P $\Leftrightarrow$ Q » est vraie et Q est vraie donc on déduit que P est vraie.

Exemple1 : $\forall x>0\quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

Solution : $x+\frac{1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}\geq 2$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}-2\geq 0\Leftrightarrow\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$

$\Leftrightarrow\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$

et puisque on a : $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ donc $\forall x>0\quad x+\frac{1}{x}\geq 2$

4.7. Raisonnement par récurrence :

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une proposition P(n), dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :
1étapes : l'initialisation on prouve P (0) est vraie
2étapes : d'hérédité : on suppose n > 0 donné avec P(n) vraie
3étapes : on démontre alors que La proposition P(n+1) au rang suivant est vraie
Enfin dans la conclusion : P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1: Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$

Solution : notons P(n) La proposition suivante : $\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$. Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $3^0 \geq 1+2\times 0$ donc $1 \geq 1$.
Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire :
$3^n \geq 1+2n$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $3^{n+1} \geq 1+2(n+1)$?? c'est-à-dire Montrons que $3^{n+1} \geq 2n+3$??
On a : $3^n \geq 1+2n$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $3^n \times 3 \geq 3\times(1+2n)$
donc : $3^{n+1} \geq 6n+3$
Or on remarque que : $6n+3 \geq 2n+3$ (on pourra faire la différence $(6n+3)-(2n+3)=4n \geq 0$)
donc : on a $6n+3 \geq 2n+3$ et $3^{n+1} \geq 6n+3$ donc $3^{n+1} \geq 2n+3$
Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout n > 0, c'est-à-dire
$\forall n \in \mathbb{N}; 3^n \geq 1+2n$.

Exemple 2: (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+3+...+n = \dfrac{n\times(n+1)}{2}$.

Solution : notons P(n) La proposition
Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1 = \dfrac{1\times(1+1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ donc $1=1$.
Donc P(0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $1+2+3+...+n = \dfrac{n\times(n+1)}{2}$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $1+2+3+...+n+(n+1) = \dfrac{(n+1)\times(n+2)}{2}$??
On a : $1+2+3+...+n+(n+1) = (1+2+3+...+n)+(n+1)$
et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $1+2+3+...+n+(n+1) = \dfrac{(n+1)\times(n+2)}{2}$
donc $1+2+3+...+n+(n+1) = \dfrac{n\times(n+1)}{2}+(n+1) = (n+1)\left(\dfrac{n}{2}+1\right) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$
Donc P(n+1) est vraie.
Conclusion: Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*; 1+2+3+...+n = \dfrac{n\times(n+1)}{2}$

Exemple 3: Montrer par récurrence que :pour tout entier $n \geq 5$: $2^n \geq 6n$

Solution : notons P(n) La proposition : « $2^n \geq 6n$ »

1étapes : Initialisation : Pour $n=5: 2^5=32$ et $6\times5=30$ donc $2^5 \geq 6\times5$
Donc P(5) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $2^n \geq 6n$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $2^{n+1} \geq 6(n+1)$??

Or, puisque $2^n \geq 6n$ (d'après l'hypothèse de récurrence)
Donc : $2^n \times 2 \geq 6n \times 2$ donc $2^{n+1} \geq 12n$ **(1)**
Or on remarque que : $12n \geq 6(n+1)$ **(2)**

En effet : $12n-6(n+1)=6n-6\geq 0$

Car : $n\geq 5$ donc $6n \geq 30$ donc $6n-6\geq 24\geq 0$

On conclut par récurrence que : Pour tout $n \geq 5$: $2^n \geq 6n$

Exemple 4: Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; n^3+2n$ est divisible par 3

Solution :montrons $\exists k \in \mathbb{N} / n^3+2n=3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $0^3+2\times0=0$ est un multiple de3
Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie
c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / n^3+2n=3k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3+2(n+1)=3k'$??

$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=$

$=(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$

$=3(k+n^2+n+1)=3k'$ avec $k'=k+n^2+n+1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}; n^3+2n$ est divisible par 3

Exemple 5: (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}.$$

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1^2 = \frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = 1$

donc $1=1$. Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$??

On a : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 = (1^2+2^2+3^2+...+n^2)+(n+1)^2$

et on a : $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$$

Et on remarque que : $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

Donc : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

Exemple 6: (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}.$$

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1^3 = \frac{1^2\times(1+1)^2}{4} = 1$

donc $1=1$. Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2\times(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$??

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$

et on a : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4}$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$

$$= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{2^2} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4}$.

Exemple 7: (Récurrence) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) = 1+3+5+...+(2n+1) = (n+1)^2.$$

Solution : notons P(n) La proposition

Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons $1+3=4$ et $(1+1)^2 = 4$ donc $4=4$.

Donc P(0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) = (n+1)^2$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\sum_{k=1}^{k=n+1} (2k+1) = 1+3+5+...+(2n+1)+(2n+3) = (n+2)^2$??

On a : $\sum_{k=1}^{k=n+1} (2k+1) = \sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) + (2n+3)$

et on a d'après l'hypothèse de récurrence: $\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) = (n+1)^2$

donc $\sum_{k=1}^{k=n+1} (2k+1) = (n+1)^2 + (2n+3) = n^2+2n+1+2n+3 = n^2+4n+4$

donc $\sum_{k=1}^{k=n+1} (2k+1) = (n+2)^2$ donc P(n+1) est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence on a : $\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) = (n+1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Exemple 8: Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9

Solution :montrons que : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n + 6n - 1 = 9k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $4^0 + 6 \times 0 - 1 = 0$ est un multiple de 9

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie

c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n + 6n - 1 = 9k$ donc $4^n = 9k - 6n + 1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 9k'$??

$4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 4 \times 4^n + 6n + 6 - 1$

$= 4 \times (9k - 6n + 1) + 6n + 6 - 1 = 36k + 4 - 24n + 6n + 6 - 1$

$= 36k + 9 - 18n = 9(4k + 1 - 2n) = 9k'$ avec $k' = 4k + 1 - 2n$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}; 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Logique mathématique (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / $1^{ère}$ et $2^{ème}$ Bac International SM

Exemple 9: Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 7^n - 1$ est divisible par 6

Solution : 1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $7^0 - 1 = 0$ est un multiple de 6
Donc P (0) est vraie.
2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie
c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 7^n - 1 = 6k$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.
Montrons alors que : $\exists k' \in \mathbb{N} / 7^{n+1} - 1 = 6k'$??

$$7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7^n \times (6+1) - 1 = 6 \times 7^n + 7^n - 1 = 6 \times 7^n + 6k$$

$7^{n+1} - 1 = 6(7^n + k) = 6k'$ avec $k' = 7^n + k$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}; 7^n - 1$ est divisible par 6