Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Lois binominale (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Qui est Jakob Bernoulli ??

Jacques ou Jakob Bernoulli (27 décembre 1654 - 16 août 1705) est un mathématicien et physicien suisse (né et mort à Bâle), frère de Jean Bernoulli et oncle de Daniel Bernoulli et Nicolas Bernoulli.

C'est quoi une loi binominale ??

*C'est une variable aléatoire un peu **spéciale….***

1- *L'expérience est répétée un certain nombre de fois (n)*
2- *l'expérience n'a que deux issues possibles donc l'univers se réduit à deux événement (Succès / échec)*
3- *on s'intéresse au nombre de fois que le succès (ou l'échec) se réalise durant les (n) répétitions de l'expérience*

A quoi ça sert ??

La loi binomiale est utilisée dans de nombreux domaines, tels que:

- **Statistiques:** Pour analyser des données où l'on répète une expérience avec deux résultats possibles.
- **Contrôle de qualité:** Pour évaluer la proportion de produits défectueux dans un lot.
- **Recherche médicale:** Pour étudier l'efficacité d'un traitement.
- **Économie:** Pour analyser des marchés avec deux issues possibles (par exemple, achat ou non-achat).

La formule

Soit p la probabilité d'un événement A dans une expérience aléatoire
On répète cette épreuve n fois de suite
La variable aléatoire X qui lie chaque résultat au nombre de fois que cet événement se réalise s'appelle une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p

Et on a : $\forall k \in \{0;1;2;3;...;n\}$; $p(X=k)=C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Et $E(X)=n\times p$

Et $v(X)=n\times p\times(1-p)$

Faisant la démonstration ….

On répète une expérience n fois …combien nous avons d'éléments (n uplets) qui contient k succès ??

Réponse => $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Quelle est la probabilité d'avoir k succès dans un seul élément de sortie ??

Réponse => $\boxed{P^k(1-p)^{n-k}}$

Pk représente la probabilité d'avoir k succès dans un seul tirage de n éléments

(1-p)n-k représente la probabilité d'avoir (n-k) échecs dans ce tirage de n éléments

Donc la probabilité d'avoir k succès en tenant du nombre d'éléments qui contient k succès possibles est

$$\boxed{C_n^k P^k(1-p)^{n-k}}$$

Application 1

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,7$.

Calculer une valeur approchée à 10^{-4} de :

1. $P(X \geq 5)$
2. $P(X > 0)$
3. $P(X \leq 5)$
4. $P(X < 2)$

Application 2

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Dans un lycée, la probabilité qu'un élève rencontré au hasard fasse du sport dans une association est de 32 %.

On rencontre au hasard et successivement n élèves.

on admet que la variable aléatoire X, qui compte le nombre d'élèves faisant du sport dans une association, suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,6$.

1. Dans cette question, $n = 10$. Quelle est la probabilité qu'au plus un élève fasse du sport dans une association ?
2. Dans cette question, n n'est pas fixé. Combien doit-on rencontrer d'élèves pour que la probabilité qu'au moins un élève fasse du sport dans une association soit supérieure à 99,9 % ?

Application 3

Dans une région pétrolifère, la probabilité qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est 0,1.

1) Justifier que la réalisation d'un forage peut être assimilée à une épreuve de Bernoulli.
2) On effectue 9 forages.

a. Quelle hypothèse doit-on formuler pour que la variable aléatoire X correspondant au nombre de forages qui ont conduit à une nappe de pétrole suive une loi binomiale ?

b. Sous cette hypothèse, calculer la probabilité qu'au moins un forage conduise à une nappe de pétrole. En donner la valeur à 10^{-3} près.

Solutions

Solution 1

1. Ici, il est préférable de faire un calcul direct :

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= P(X=5) + P(X=6) \\ &= \binom{6}{5} \times 0,7^5 \times 0,3^1 + \binom{6}{6} \times 0,7^6 \times 0,3^0 \\ &\approx 0,30253 + 0,11765 \\ &\approx 0,4202 \end{aligned}$$

2. On utilise l'évènement contraire :

$$\begin{aligned} P(X > 0) &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - \binom{6}{0} \times 0,7^0 \times 0,3^6 \\ &= 1 - 0,3^6 \\ &\approx 1 - 0,00073 \\ &\approx 0,9993 \end{aligned}$$

3. On utilise l'évènement contraire :

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= 1 - P(X=6) \\ &= 1 - \binom{6}{6} \times 0,7^6 \times 0,3^0 \\ &= 1 - 0,7^6 \\ &\approx 1 - 0,11765 \\ &\approx 0,8824 \end{aligned}$$

4. On fait un calcul direct :

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X=1) + P(X=0) \\ &= \binom{6}{1} \times 0,7^1 \times 0,3^5 + \binom{6}{0} \times 0,7^0 \times 0,3^6 \\ &\approx 0,01021 + 0,00073 \\ &\approx 0,0109 \end{aligned}$$

Solution 2

1. Il s'agit de calculer $P(X \leq 1)$.

On utilise un calcul direct :

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X=0)+P(X=1) \\ &= \binom{10}{0} \times 0,32^0 \times 0,68^{10} + \binom{10}{1} \times 0,32^1 \times 0,68^9 \\ &= 0,0211 + 0,0995 \\ &\approx 0,12 \end{aligned}$$

La probabilité qu'au plus un élève fasse du sport dans une association sur les 10 élèves rencontrés est d'environ 12 %.

2. Il s'agit de déterminer la valeur de n telle que $P(X \geq 1) > 0,999$.

Or,

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} \times 0,32^0 \times 0,68^n \end{aligned}$$

On sait que $\binom{n}{0} = 1$ et $0,32^0 = 1$ donc :

$P(X \geq 1) = 1 - 0,68^n$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) > 0,999 &\iff 1 - 0,68^n > 0,999 \\ &\iff -0,68^n > -0,001 \\ &\iff 0,68^n < 0,001 \\ &\iff n \times \ln(0,68) < \ln(0,001) \\ &\iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,68)} \end{aligned}$$

(Comme $\ln(0,68) < 0$, la dernière division change à nouveau le sens de l'inégalité.)

Or $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,68)} \approx 17,91$ donc on doit interroger au moins 18 élèves pour que la probabilité qu'au moins un élève fasse du sport dans une association soit supérieure à 99,9 %.

Remarque : si vous n'avez pas encore vu les logarithmes, vous pouvez essayer de trouver le résultat par essais successifs à la calculatrice, vous gagnerez toujours quelques points.

Solution 3

1) Le forage conduit à une nappe de pétrole avec une probabilité 0,1 ou pas avec une probabilité 0,9. C'est donc bien une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,1. Il a bien que deux issues possibles.

2)

a. Les forages doivent être indépendants pour que X suive une loi binomiale.

b. $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0,9^9 \approx \boxed{0,613}$