Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Lois à densité (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

I. Loi de probabilité à densité

1- Densité de probabilité et variable aléatoire

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I ($I \subset \mathbb{R}$) est une **densité de probabilité** si :

- f est **continue sur I**
- f est **positive sur I**
- **l'aire sous la courbe** est égale à **1 u. a.** (unité d'aire).

f étant positive, la troisième condition peut se formuler : $\int_I f(t)dt = 1$

Application 1

Vérifiez si la fonction f (t) = 2/3 t sur [1,2] est une densité de probabilité

Solution

$f(t) > 0$ f est continue sur $[1; 2]$ $\int_1^2 f(t)dt = F(2) - F(1) = 1$

Donc f est une densité de probabilité

Soit f une densité de probabilité sur I. On dit que **la variable aléatoire X suit la loi de densité f sur I**, si pour tout intervalle $J \subset I$, la **probabilité de l'événement** « $X \in J$ » est égale à :

$$P(X \in J) = \int_J f(t)dt$$

Remarques :

- $P(X \in J)$ correspond à **l'aire sous la courbe sur l'intervalle J.**
- **Les probabilités correspondent aux intégrales**, et non aux valeurs prises par la fonction f.
- $P(X \in I) = \int_I f(t)dt = 1$ (on retrouve la probabilité de l'événement certain)

Espérance :

L'espérance d'une variable aléatoire X à densité f sur $[a; b]$ est :

$$E(X) = \int_a^b t \times f(t)dt$$

L'espérance correspond à la notion de moyenne

2- Lois uniformes

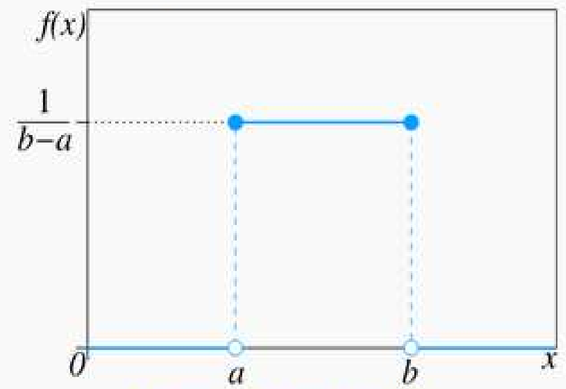
- ✓ C'est une loi de probabilité à densité caractérisée par le fait que tous les intervalles de même longueur inclus dans I ont la même probabilité.

✓ L'aire au dessous de la courbe doit être égale à "1" or cette surface est un rectangle de cotés b-a et f(x) donc (b-a) * f(x) = 1 d'où $f(x) = \frac{1}{b-a}$

Une loi uniforme est paramétrée par la plus petite valeur "a" et la plus grande valeur "b" que la variable aléatoire correspondante peut prendre.

Paramètres	$-\infty < a < b < +\infty$
Support	$[a, b]$
Densité de probabilité	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pour } a \le x \le b \\ 0 & \text{pour } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$
Fonction de répartition	$\begin{cases} 0 & \text{pour } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pour } a \le x < b \\ 1 & \text{pour } x \ge b \end{cases}$
Espérance	$\frac{a+b}{2}$
Médiane	$\frac{a+b}{2}$

Loi uniforme continue de paramètres a et b



Densité de probabilité

Application2

Montrez que la fonction f(t) =1/2 sur [0,2] est une loi à densité de probabilité uniforme.

<u>Probabilité :</u>

La probabilité de l'événement « $X \in [c; d]$ » (avec $[c; d] \subset [a; b]$) est alors :

$$\boxed{P(X \in [c;d]) = \int_c^d \frac{1}{b-a}dt = \frac{d-c}{b-a}}$$

Démonstration => calcul de l'aire du rectangle de coté (CD) et f(x)

Ex : $f(t) = \frac{1}{2}$ sur $[0\,;2]$. $P(0 < X < 0{,}5) = \frac{0{,}5-0}{2} = \frac{1}{4}$.

3- <u>Lois exponentielles</u>

Certains phénomènes naturels suivent une loi exponentielle comme par exemple l'activité d'un échantillon de noyaux radioactifs

$$A(t) = \lambda N_0\, e^{-\lambda t}$$

A= activité en des/s (bequerel)

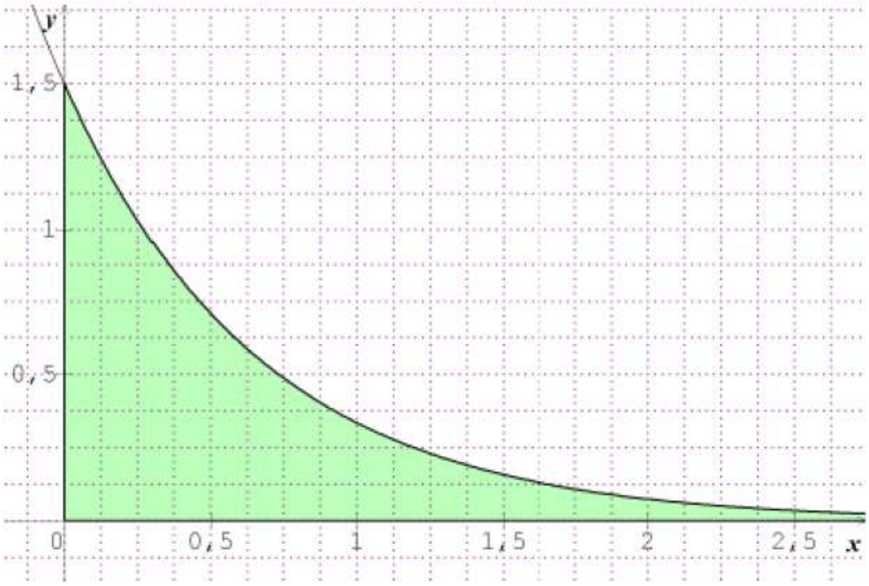
N=nombre de noyaux radioactifs à l'instant "t"

λ constante de désintégration en s^{-1} (probabilité de désintégration)

$$\boxed{f(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$$

- On a bien alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = 1$
- $f(0) = \lambda e^{-\lambda \times 0} = \lambda$

Ex : $f(t) = 1{,}5e^{-1{,}5t}$ sur $[0; +\infty[$ est une loi exponentielle.



Probabilité :

La probabilité de l'événement « $X \in [c; d]$ » (avec $[c; d] \subset [0; +\infty[$) est :

$$P(X \in [c;d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

La probabilité de l'événement « $X \geq c$ » (avec > 0) est :

$$P(X \geq c) = \int_c^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda c}$$

Ex : $f(t) = 1{,}5e^{-1{,}5t}$ sur $[0; +\infty[$

$P(0 < X < 2) = e^{-1{,}5\times 0} - e^{-1{,}5\times 2} = 1 - e^{-3}$

$P(X \geq 1) = e^{-1{,}5\times 1} = e^{-1{,}5}$

Espérance:

$$E(X) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x t \times \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

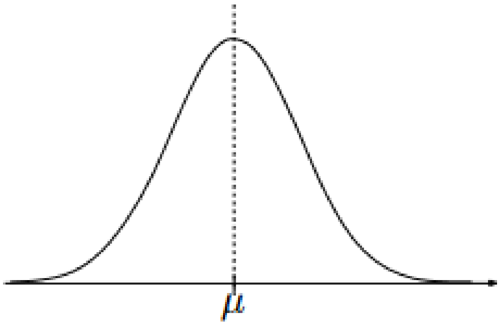
4- Lois normales

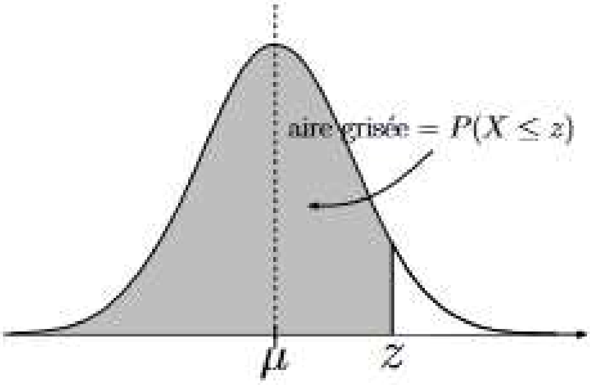
Certains phénomènes humains suivent une loi normale comme par exemple des statistiques sur la taille d'un certain nombre de personnes, le quotient intellectuelle…..

On obtient une courbe en cloche dont la population se concentre essentiellement autour de la moyenne.

Modèle général

- courbe symétrique par rapport à μ
- forme de cloche





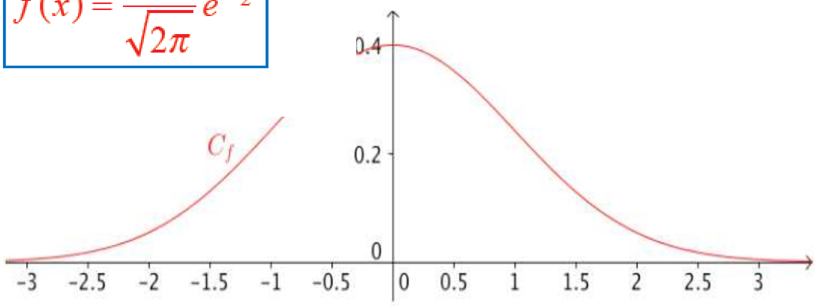
Pour chaque μ, σ, il existe une **loi normale de moyenne** μ **et d'écart-type** σ.

On la note $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Cas particulier (centrée réduite)

$\mu = 0$ et $\sigma = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Pour le calcul des probabilités, Il n'est pas possible de déterminer une forme explicite de primitives de la fonction densité de la loi normale centrée réduite c'est pour cela qu'on utilise la calculatrice

Utilisation de la calculatrice

Calcul de P(a < X < b) (probabilité d'un intervalle):

1. Accédez au menu des distributions de votre calculatrice (généralement sous "STAT" ou "DIST").
2. Sélectionnez la fonction de distribution normale (normalcdf ou normalFrép).
3. Entrez les valeurs de la borne inférieure (a), la borne supérieure (b), la moyenne (μ) et l'écart-type (σ) de votre loi normale.
4. Validez pour obtenir la probabilité.

Exemple: Pour calculer P(2 < X < 4) où X suit une loi normale de moyenne 3 et d'écart-type 1, vous entrerez 2 pour la borne inférieure, 4 pour la borne supérieure, 3 pour la moyenne et 1 pour l'écart-type.

Calcul de P(X< a) (probabilité d'une borne inférieure):

Utilisez la même procédure que pour le calcul d'intervalle, mais entrez une valeur très petite (par exemple, -10^99 ou -1E99) pour la borne inférieure.

Calcul de P(X> a) (probabilité d'une borne supérieure):

Utilisez la même procédure que pour le calcul d'intervalle, mais entrez une valeur très grande (par exemple, 10^99 ou 1E99) pour la borne supérieure.

Calcul de la valeur 'a' correspondant à P(X < a) = p (recherche de quantile):

1. Accédez au menu des distributions de votre calculatrice.
2. Sélectionnez la fonction inverse de la normale (invNorm ou FracNormale).
3. Entrez la probabilité (p), la moyenne (μ) et l'écart-type (σ).
4. Validez pour obtenir la valeur de 'a'.

Exemple: Pour trouver la valeur 'a' telle que P(X < a) = 0.95, vous entrerez 0.95 pour la probabilité, 3 pour la moyenne et 1 pour l'écart-type.

Passer d'une loi normale à une loi centrée réduite

Soit X est une variable aléatoire quelconque, soit X une variable aléatoire telle que

$$\boxed{Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}}$$

Alors Z est une loi normale centrée réduite

5- Fonction de répartition

C'est une fonction qui, à tout nombre réel x, associe la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur inférieure ou égale à x.

$\boxed{F(x) = P(X \leqslant x)}$ $\boxed{P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)}$ $\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}$

Propriétés de la fonction de répartition

- ✓ F est croissante de 0 à 1
- ✓ F est continue à droite en tout point

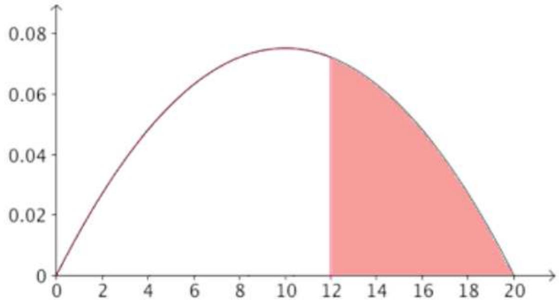
Application 3

Une entreprise produit des dalles en plâtre suivant une variable aléatoire continue *X*, en tonnes, qui prend ses valeurs dans l'intervalle [0 ; 20] avec une densité de probabilité *f* définie par : $f(x) = 0{,}015x - 0{,}00075x^2$

a) Démontrer que *f* est une densité de probabilité sur [0 ; 20].
b) Calculer la probabilité de l'événement *E* = « La production quotidienne est supérieure ou égale à 12 tonnes. »
c) Calculer l'espérance mathématique de *X*.

Solution

a) - f est continue sur l'intervalle [0 ; 20] comme fonction trinôme.



- $f(0) = f(20) = 0$

donc, d'après la règle des signes d'un trinôme, $f(x) \geq 0$ sur [0 ; 20].

- $\int_0^{20} f(t)\,dt = \left[0,0075t^2 - 0,00025t^3\right]_0^{20} = 0,0075 \times 20^2 - 0,00025 \times 20^3 - 0 = 1$

b) $P(E) = P(12 \leq X \leq 20)$

$$= \int_{12}^{20} f(t)\,dt$$

$$= \left[0,0075t^2 - 0,00025t^3\right]_{12}^{20}$$

$$= 0,0075 \times 20^2 - 0,00025 \times 20^3 - 0,0075 \times 12^2 + 0,00025 \times 12^3$$

$$= 0,352$$

c) $E(X) = \int_0^{20} t\,f(t)\,dt$

$$= \int_0^{20} t\,f(t)\,dt$$

$$= \int_0^{20} 0,015t^2 - 0,00075t^3\,dt$$

$$= \left[0,005t^3 - 0,0001875t^4\right]_0^{20}$$

$$= 0,005 \times 20^3 - 0,0001875 \times 20^4 - 0$$

$$= 10$$