

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Les nombres complexes 1

I) L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

On admet qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ ses éléments s'appellent des nombres complexes qui vérifie :

- 1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- 2) On définit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux opérations appelées la somme et la multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.
- 3) L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un nombre non réel noté i et qui vérifie $i^2 = -1$
- 4) Tout nombre complexe z s'écrit et de façon unique comme : $z = a + ib$ où a et b sont des réels
- 5) Le réel a s'appelle la partie réel du nombre complexe z ; on écrit : $a = \text{Re}(z)$
- 6) Le réel b s'appelle la partie imaginaire du nombre complexe z ; on écrit : $b = \text{Im}(z)$
- 7) L'écriture : $z = a + ib$ s'appelle l'écriture algébrique du nombre complexe z .

THÉORÈME : Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ deux nombres complexes :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

L'écriture algébrique d'un nombre complexe est unique.

- 1) L'ensemble $\mathbb{R}$ est totalement ordonné, c'est-à-dire : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)(x \leq y \text{ ou } y \leq x)$
- 2) L'ensemble des nombres complexes n'est pas ordonné.

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

II) LES OPERATIONS DANS $\mathbb{C}$.

1) L'addition dans $\mathbb{C}$.

Définition : Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

La somme des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z + z'$ définie par :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

On en déduit que : $Re(z + z') = Re(z) + Re(z')$ et

$$Im(z + z') = Im(z) + Im(z')$$

L'addition dans l'ensemble $\mathbb{C}$ est :

1) Associative : $(\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3)$

$$((z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3))$$

2) Commutative : $(\forall (z, z' \in \mathbb{C}^2))(z + z' = z' + z)$

3) 0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{C}$:

$$(\forall z \in \mathbb{C})(0 + z = z + 0 = z)$$

4) Chaque élément z dans $\mathbb{C}$ a un symétrique appelé l'opposé de z noté $(-z)$; $z + (-z) = (-z) + z = 0$

2) La multiplication dans $\mathbb{C}$.

Le produit des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z \times z'$ définie par :

$$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + ab'i + iba' + bb'i^2$$

$$i^2 = -1$$

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

La multiplication dans l'ensemble $\mathbb{C}$ est :

1) Associative : $(\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3)$

$$((z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3))$$

2) Commutative : $(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2)(z \times z' = z' \times z)$

3) 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$: $(\forall z \in \mathbb{C})(1 \times z = z \times 1 = z)$

4) Chaque élément non nul z dans $\mathbb{C}$ a un

symétrique appelé l'inverse de z noté : $(\frac{1}{z} \text{ ou } z^{-1})$

$$\text{Et on a } z \times \frac{1}{z} = 1$$

5) La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$:

$$(\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3) (z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3)$$

Règles de calculs dans $\mathbb{C}$

Toutes les règles de calculs qu'on a connu dans $\mathbb{R}$ sont vraies dans $\mathbb{C}$.

$$1) zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0$$

$$2) z^0 = 1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}^*)(z^n = \underbrace{z \times z \times \dots \times z}_n \text{ } n \text{ fois})$$

$$3) z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

$$4) z^{n+m} = z^n \times z^m$$

$$5) z^{n-m} = z^n / z^m$$

$$6) (z^n)^m = z^{n \times m}$$

$$7) z^n - z_1^n = (z - z_1)(z^{n-1} + z^{n-2}z_1 + \dots + z^1z_1^{n-2} + z_1^{n-1})$$

$$8) \text{ Si } z \neq 1 \text{ alors : } S = 1 + z^1 + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Application : Trouver la forme algébrique et déterminer la parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2 \quad z_2 = (1+i\sqrt{3})^3$$

$$z_3 = \frac{1-3i}{3-i} \quad z_4 = \frac{1+i}{3-2i} \quad z_5 = (1+i)^{10}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Solution :1)

car $\text{Im}(z_2) = 0$

$$z_1 = -6 + 5i = a + bi \text{ donc } \text{Re}(z_1) = -6 \text{ et } \text{Im}(z_1) = 5$$

$$2) z_2 = (1 + i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times (\sqrt{3}i) + 3 \times 1 \times (\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3$$

$$z_2 = 1 + 3\sqrt{3}i - 3 \times 3 - 3\sqrt{3}i = -8 + 0i \in \mathbb{R}$$

$$3) z_3 = \frac{1-3i}{3-i} = \frac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i-9i+3}{9-i^2} = \frac{6-8i}{10}$$

$$z_3 = \frac{6}{10} - \frac{8i}{10} = \frac{3}{5} - \frac{4i}{5} \text{ donc } \text{Re}(z_1) = \frac{3}{5} \text{ et } \text{Im}(z_1) = -\frac{4}{5}$$

$$4) z_4 = \frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+3i-2}{9-4i^2} = \frac{1+5i}{13} = \frac{1}{13} + i\frac{5}{13}$$

$$5) z_5 = (1+i)^{10} = ((1+i)^2)^5 = (1^2 + 2i \times 1 + i^2)^5 = (2i)^5$$

$$z_5 = (2i)^5 = 2^5 \times i^5 = 32 \times (i^2)^2 \times i = 32i$$

est un imaginaire pur car $\text{Re}(z_5) = 0$

REMARQUES :

Lorsque $\text{Im}(z) = 0$, $z = a$ est réel.

Lorsque $\text{Re}(z) = 0$, $z = ib$ est appelé imaginaire pur.

III) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) L'interprétation géométrique et représentation d'un nombre complexe

Le plans $(\mathcal{P})$ est muni du repère orthonormé

$\mathcal{R}(O; \vec{u}; \vec{v})$; et soit $\mathcal{V}_2$ le plan vectoriel associé à $(\mathcal{P})$.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe le couple (a, b) est associé à un point unique M dans le plan $(\mathcal{P})$.

L'application : $\mathbb{C} \rightarrow (\mathcal{P})$

$$z \mapsto M(a, b)$$

où $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$ est une bijection

1) Le point M s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan $(\mathcal{P})$, et l'application

2) Le complexe z s'appelle l'affixe du point M

on écrit : $z = \text{aff}(M)$ et on écrit : $z_M = a + ib$

3) L'application : $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{V}_2$

$$z \mapsto \vec{u} \quad (a; b)$$

où $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$ est une bijection

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

4) Le vecteur $\vec{u}$ s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan ($\mathcal{P}$)

5) Le complexe z s'appelle l'afixe du vecteur $\vec{u}$ on

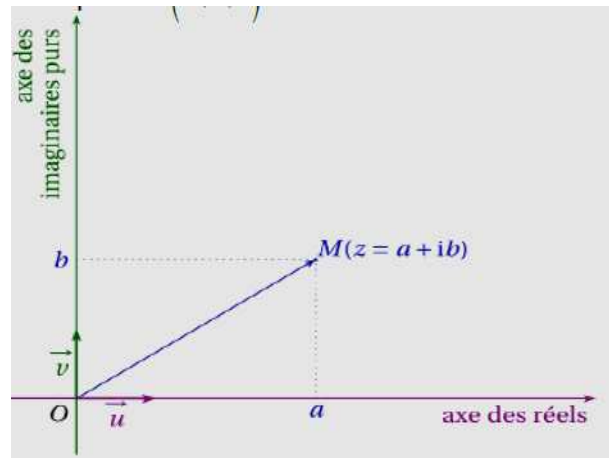
écrit : $z = aff(\vec{u})$ on écrit : $z_u = a + ib$

6) Le plan ($\mathcal{P}$) s'appelle un plan complexe

7) a) L'axe $(O; \vec{u})$ s'appelle l'axe des réels

b) L'axe $(O; \vec{v})$ s'appelle l'axe des imaginaires

Dans tout qui va suivre le plan complexe est muni d'un repère $\mathcal{R}(O; \vec{u}; \vec{v})$



2) Les opérations sur les affixes.

Propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}_2$;
 M et N deux points dans le plan ($\mathcal{P}$) et α un réel ;
On a :

$$1) aff(A) = aff(B) \Leftrightarrow A = B$$

$$\text{et } aff(\vec{u}) = aff(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$$

$$2) aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$$

$$3) aff(\alpha \vec{u}) = \alpha \times aff(\vec{u})$$

$$4) aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$$

Retenez en particulier la dernière propriété

Propriété :

1) Soient $[AB]$ un segment de milieu I ; on a :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

2) Le barycentre de 2 points pondérés :

$$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \text{ on a } z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$$

$$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \text{ on a :}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

3) Le barycentre de 2 points pondérés :

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

3) Condition complexe d'alignement de 3 points

Soient A , B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs : z_A , z_B et z_C

On sait que :

A , B et C sont alignés $\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R})(\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB})$

$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R})(z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A))$

$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha \right) \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Propriété : Soient A , B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs z_A , z_B et z_C

les points A , B et C sont alignés si et seulement si :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Exemple2 : soient dans le plan complexe les

points : $A(2; -3)$ et $B(1; 1)$ et $C(1; 2)$

1) Déterminer les affixes des points A et B et C ?

2) Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

3) Déterminer l'affixe de I , milieu de $[AB]$.

4) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

5) Déterminer le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$

6) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Solutions : 1) l'affixe du point A est $z_A = 2 - 3i$

$$3) z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 - 3i + 1 + i}{2} = \frac{3 - 2i}{2} = \frac{3}{2} - i$$

l'affixe du point B est $z_B = 1 + i$

$$4) \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(1 + 2i) - (2 - 3i)}{(1 + i) - (2 - 3i)} = \frac{-1 + 5i}{-1 + 4i}$$

l'affixe du point C est $z_C = 1 + 2i$

$$= \frac{(-1 + 5i)(-1 - 4i)}{(-1 - 4i)(-1 + 4i)} = \frac{1 + 4i - 5i + 20}{(-1)^2 - (4i)^2}$$

2) $aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{21 - i}{17} = \frac{21}{17} - \frac{1}{17}i \notin \mathbb{R}$$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = (1 + i) - (2 - 3i) = -1 + 4i$$

Donc : les points A , B et C ne sont pas alignés.

6) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement

5) le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$?

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c'est-à-dire : $z_B - z_A = z_C - z_D$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{2z_A - 1z_B + 3z_C}{2 - 1 + 3}$$

$$z_D = z_C + z_A - z_B$$

$$z_G = \frac{2(2 - 3i) - 1(1 + i) + 3(1 + 2i)}{2 - 1 + 3} = \frac{6 - i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}i$$

On en déduit en remplaçant par les données :

$$z_D = 1 + 2i + 2 - 3i - 1 - i = 2 - 2i$$

Exercice 1 :

soient dans le plan complexe les points :

A ; B ; C ; D ; E d'affixes respectivement :

$$z_A = 1 + i \text{ et } z_B = 3 + 2i \text{ et } z_C = 2 - i \text{ et } z_D = -2i$$

et $z_E = 2$

1) Représenter ces points dans le plan complexe

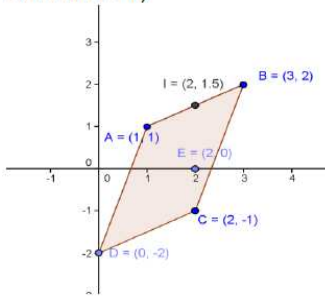
2) Déterminer l'affixe de I milieu de $[AB]$.

3) Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

4) montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Solution : 1)



$$\text{Donc : } z_I = \frac{z_B + z_A}{2} \text{ donc : } z_I = \frac{3+2i+1+i}{2} = 2 + \frac{3}{2}i$$

$$\text{Donc : } I\left(2; \frac{3}{2}\right)$$

I milieu de $[AB]$. Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ donc $z_I - z_A = z_B - z_I$ 3) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3+2i - (1+i) = 3+2i-1-i = 2+i$

4) il suffit de montrer que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\text{On a : } z_{\overrightarrow{AB}} = 2+i$$

$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 2-i - (-2i) = 2+i$$

$$\text{Donc : } z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \text{ par suite : } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

Donc : le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

IV) LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

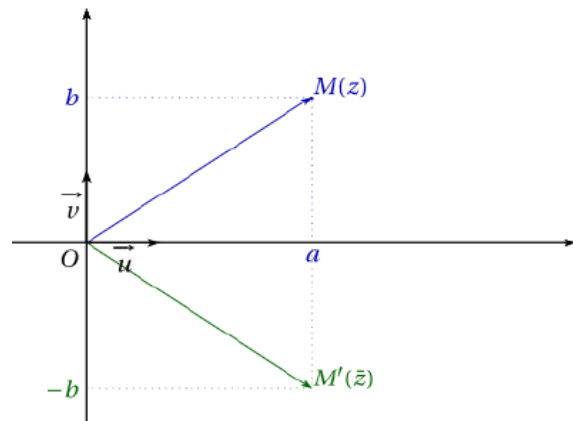
Définition : Soit le nombre complexe $z = a + ib$

(a et b sont des réels) ; le nombre complexe

qu'on note $\bar{z}$ et qui est égale à $\bar{z} = a - ib$

S'appelle le conjugué du nombre complexe z

Si z est l'afixe de M , $\bar{z}$ est l'afixe de M' du symétrique de M par rapport à l'axe des réels.



Propriété

$$1) \text{ si } z = x + iy \text{ alors } z \times \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$2) \bar{\bar{z}} = z \quad 3) z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) \quad 4) z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$5) z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \quad 6) z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$$

$$7) \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad 8) \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$$

$$9) \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad 10) \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}} \text{ si } z \neq 0$$

$$11) \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$12) \bar{\lambda z} = \lambda \bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Exemple1 : Démontrer que $S = (1+i)^5 + (1-i)^5$ est un nombre réel.

Solution : On a :

$$\bar{S} = \overline{(1+i)^5 + (1-i)^5} = \overline{(1+i)^5} + \overline{(1-i)^5} = \overline{(1+i)^5} + \overline{(1-i)^5}$$

$$\bar{S} = (1-i)^5 + (1+i)^5 = S$$

S est donc bien un nombre réel.

Exemple2 : on pose : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $S = j^{2n} - j^n \quad n \in \mathbb{Z}$

1) montrer que : $j^2 = \bar{j}$

2) Démontrer que : $S \in i\mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Solution : 1)

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2}i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$$

2) il suffit de montrer que : $S + \bar{S} = 0$

$$S + \bar{S} = j^{2n} - j^n + \overline{j^{2n} - j^n} = (j^2)^n - j^n + \overline{(j^2)^n - j^n}$$

$$S + \bar{S} = (\bar{j})^n - j^n + \overline{(\bar{j})^n - j^n} = (\bar{j})^n - j^n + \overline{(\bar{j})^n} - \overline{j^n}$$

$$S + \bar{S} = \bar{j}^n - j^n + j^n - \bar{j}^n = 0$$

S est donc bien un imaginaire pur

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2z + i\bar{z} = 5 - 4i$

2) $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Solution : 1) $z \in \mathbb{C}$

donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R} / z = x + yi$

Donc : $x = \frac{14}{3}$ par suite: $z = \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i$

$$2z + i\bar{z} = 5 - 4i \Leftrightarrow 2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 4i$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i \right\}$$

$$(2x + y) + i(2y + x) = 5 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y + x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

2) $z \in \mathbb{C}$ donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R} / z = x + yi$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x + 2x + y = 8 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{13}{3}$$

$$z = 2\bar{z} - 2 + 6i \Leftrightarrow x + yi = 2(x - yi) - 2 + 6i$$

$$\text{Donc : } S = \{2 + 2i\}$$

V) LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

Définition : Soit $z = x + yi$ un nombre complexe

avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

le réel positif $\sqrt{x^2 + y^2}$ s'appelle le module du

nombre complexe z et on le note $|z|$

Propriétés : Pour tous complexes z et z' et pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a :

$$1) |\bar{z}| = |-z| = |z| \quad 2) |z|^2 = z\bar{z} \quad 3)$$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$$

$$4) |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad 5) |z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$6) \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|} \quad \text{si } z \neq 0$$

$$7) |z^n| = |z|^n \quad \text{si } z \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$8) |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Exemple : calculer le module des nombres complexes suivants : 1) $z_1 = 5(1 + i\sqrt{3})$

2) $z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i)$ 3) $z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$

Solution :

1) $|z_1| = |-5(1+i\sqrt{3})| = |-5||1+i\sqrt{3}| = 5\sqrt{1+3} = 10$

2) $|z_2| = |(1+i)(\sqrt{3}-i)| = |1+i| \times |\sqrt{3}-i| = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$

3) $|z_3| = \left|\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3\right| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|^3 = \left(\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|\right)^3 = \left(\frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i|}\right)^3$

$|z_3| = \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}\right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

Interprétation géométrique du module

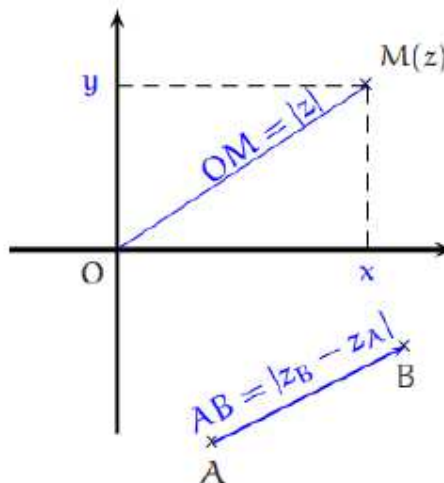
Le plan est rapporté à un repère orthonormé
soit M l'image du nombre complexe $z = x + iy$

avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on

a : $M(x; y)$ donc :

$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

Donc : $|z| = OM$



Propriété : Si A et B ont pour affixes z_A et z_B

alors : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Exemple1 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$; les points A, B et C

ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral

$$AB = |z_B - z_A| = |1 + \sqrt{3}i - 2| = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3 + \sqrt{3}i - 2| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BC = |z_C - z_B| = |3 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i| = |2| = 2$$

Donc : $AC = AB = BC$

Exemple2 : Déterminer l'ensemble (Δ) des points

Md'affixe z tels que : $|z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i|$

Methode1 : Méthode géométrique :

$$|z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i| \Leftrightarrow |z - (1 + 2i)| = |z - (7 - 2i)|$$

On pose : $A(z_A = 1 + 2i)$ et $B(z_B = 7 - 2i)$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

L'ensemble (Δ) cherché est la médiatrice du

segment $[AB]$

Methode1 : Méthode algébrique :

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x + yi$

$$|z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i| \Leftrightarrow |x + yi - 1 - 2i| = |x + yi - 7 + 2i|$$

$$\Leftrightarrow |x - 1 + i(y - 2)| = |x - 7 + i(y + 2)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-7)^2 + (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 12x - 8y - 48 = 0 \Leftrightarrow (\Delta) : 3x - 2y - 12 = 0$$

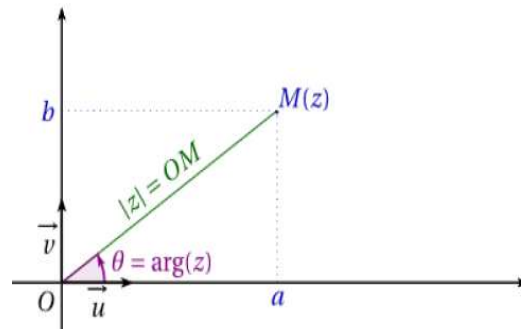
Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

VI) FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1) L'argument d'un nombre complexe

Définition : Le plan complexe est muni d'un

repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit z un nombre complexe non nul et $M(z)$ son image. On appelle argument du nombre complexe z une mesure (en radian) de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$. On le note par $\arg(z)$



Propriété : $z \in \mathbb{C}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$

$$1) z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi [2\pi] \quad 2) z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg z \equiv 0 [2\pi]$$

$$3) \arg(iy) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ si } y > 0 \text{ et } \arg(iy) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ si } y < 0$$

$$4) \arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi] \quad 5) \arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

Exemple : $\arg(5i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $\arg(-3i) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

$$\arg(2) \equiv 0 [2\pi] \text{ et } \arg(-1) \equiv \pi [2\pi]$$

2) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Propriété : Tout nombre complexe non nul z a une écriture de la forme $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$

Où $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe non nul z

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Méthode pour faire apparaître l'argument

Soit $z = a + ib$ un complexe non nul, on a donc

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0 \text{ et par suite :}$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

Or : si $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

$$\text{alors : } \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Et finalement : } z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Exercice 11 :

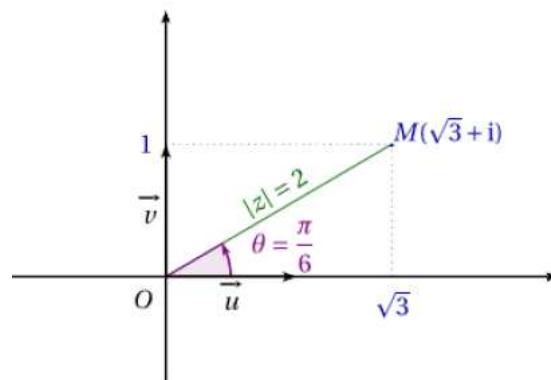
Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants :

$$1) z_1 = \sqrt{3} + i \quad 2) z_2 = 1 - i \quad 3) z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{Solution : 1) } |z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_1 = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\arg z_1 \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$



$$2) |z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Et on a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ donc :

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \quad \arg z_2 \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$3) z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i \quad |z_3| = \sqrt{\frac{3}{36} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Et on a : $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$

Donc :

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

3) Règles de calculs sur les arguments

Propriété principale

$$\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

Propriété Règles de calculs pour les arguments :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

$$1) \arg(1/z) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

$$2) \arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

$$3) \arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$$

$$4) \arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi [2\pi]$$

$$5) \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

Exemple : on considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - i \text{ et } z_2 = 1 - i \text{ et } Z = \frac{z_1}{z_2} \text{ et } U = z_1^6 \times z_2^2$$

1) Ecrivez les nombres complexes z_1 ; z_2 et Z et

Sous leurs formes trigonométriques.

2) Ecrire le complexe Z sous sa forme algébrique

puis en déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Solution : 1) $z_1 = \sqrt{3} - i$

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Donc : } \sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

On a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

$$\text{Donc : } z_1 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \left[2; -\frac{\pi}{6} \right] \quad z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$U = z_1^6 \times z_2^2 = \left[2; -\frac{\pi}{6} \right]^6 \times \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]^2$$

$$\text{On a : } |z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$U = \left[2^6; -\pi \right] \times \left[2; -\frac{\pi}{2} \right] = \left[2^7; -\pi + \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$U = 2^7 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) \right) = 2^7 (0 + 1i) = 2^7 i$$

2)

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

$$Z = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i-i+1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Donc :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

2) Applications

2.1 Alignement de 3 points.

Corolaire : Trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont

alignés si et seulement si : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0[2\pi]$

2.2 droites parallèles

Corolaire : $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ et $D(d)$

$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si : $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv 0[2\pi]$

Ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \pi[2\pi]$

2.3 droites perpendiculaires

Corolaire : $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ et $D(d)$

$(AB) \perp (CD)$ si et seulement si :

$\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

si et seulement si :

$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC})[2\pi]$ ou $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \pi - (\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC})[2\pi]$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Théorème : Soit $A(a), B(b), C(c)$ et $D(d)$ quatre points dans le plan complexe.

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et

seulement si : $\frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-d}{c-d} \in \mathbb{R}^*$

Cocycliques = sur le même cercle

Exercice19 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$Z = \frac{5z-2}{z-1}$ Soit un imaginaire pur.

Solution : Pour répondre à cette question, on peut écrire Z sous forme algébrique et dire que sa partie réelle est nulle ou il suffit de calculer la partie réelle.

Il faut que $z \neq 1$. On note $A(1)$

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x + yi$

$$Z = \frac{5z-2}{z-1} = \frac{5x-2+5iy}{x-1+iy} = \frac{(5x-2+5iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z = \frac{(5x^2-5x-2x+2+5y^2) + i(-5xy+2y+5xy-5y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 - \frac{49}{100} + \frac{2}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{100}$$

Il s'agit de l'équation du cercle (C) de centre

$$Z = \frac{(5x^2 - 7x + 2 + 5y^2) - 3iy}{(x-1)^2 + y^2}$$

Z est un imaginaire pur

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x^2 + 5y^2 - 7x + 2}{(x-1)^2 + y^2} = 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$$

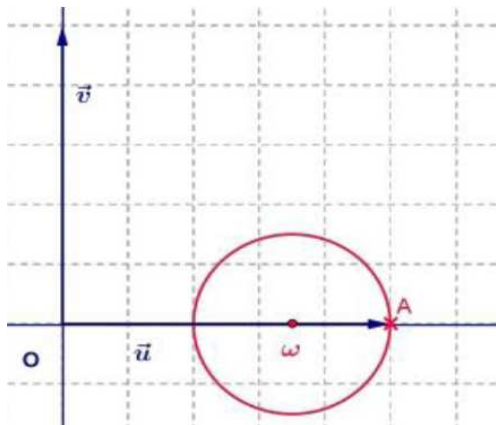
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 5y^2 - 7x + 2 = 0 \\ x \neq 1 \text{ ou } y \neq 0 \end{cases}$$

$\omega(\frac{7}{10} + 0i)$ et de rayon $\frac{3}{10}$.

Le point $A(1)$ appartient à (c).

L'ensemble cherché est donc le cercle (C) privé de A.

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International



Exercices20 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels

$$\text{que : } \left| \frac{z-2}{z+1-i} \right| = 1$$

Solution :

Première méthode (méthode algébrique)

$$z = x + yi \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

On doit avoir : $z \neq -1 + i$

$$z - 2 = x - 2 + yi$$

$$z + 1 - i = x + 1 + i(y - 1)$$

$$\left| \frac{z-2}{z+1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|z+1-i|} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z-2| = |z+1-i|$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -6x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 1$$

L'ensemble cherché est la droite (D) d'équation

$$y = 3x - 1$$

Deuxième méthode (méthode géométrique)

On pose : A(-1+i) et B(2) et M(z)

$$\overrightarrow{AM}(z+1-i) \text{ donc } |z+1-i| = AM$$

$$\overrightarrow{BM}(z-2) \text{ donc } |z-2| = BM$$

$$\left| \frac{z-2}{z+1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|z+1-i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow BM = AM$$

L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment [AB].

