Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Nombres complexes 2

I) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE

1) Notation et conséquence

Soit θ un réel on pose : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul,

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

Cette écriture s'appelle la forme exponentielle du complexe non nul z

Tous les résultats qu'on a vus au paravent concernant les modules et les arguments des nombres complexes non nuls on peut les rapporter en utilisant la notation exponentielle.

Propriété : Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

1) $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ 2) $z^n = r^n e^{in\theta}$

3) $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{r'}e^{-i\theta'}$ 4) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

5) $\overline{z} = re^{-i\theta}$ 6) $-z = re^{i(\pi+\theta)}$

Exemples : donner la forme exponentielle des complexes suivants :

1) $z_1 = 2+2i$ 2) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ 3) $z_1 \times z_2$

4) $\dfrac{z_1}{z_2}$ 5) $(z_2)^{12}$

Solution : 1) $z_1 = 2+2i$ $|z_1| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$2+2i = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

Donc : $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ $|z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

Donc : $z_2 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

Donc : $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3) $z_1 \times z_2$

$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}-\left(-i\frac{\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

5) $(z_2)^{12} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{12} = 2e^{-i12\frac{\pi}{3}} = 2e^{-4i\pi}$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

2) Formule de Moivre

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = (r)^n re^{in\theta}$$

d'où : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Application 1

Montrer que $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

Et on a : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$

Donc : $\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

Donc : $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$

Application 2

montrer que : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3(\cos\theta)^2 i\sin\theta + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)$

Donc :

$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

Donc : $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

Et : $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\left(1 - \cos^2\theta\right)$

Donc :

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

Et $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\left(1 - \sin^2\theta\right)\sin\theta - \sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

3) Formule d'Euler

Propriété : Pour tout réel θ on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration ….

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Exercice1

En utilisant la formule d'euler ..montrez que

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta \qquad \sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

Solution : 1)On a : $\cos^2 x = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2\right) = \frac{1}{4}\left(2\cos 2\theta + 2\right) = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

2) $\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$?

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3 + 3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2 + \left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8}\left(e^{i\theta 3} + 3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta} + e^{-i3\theta}\right)$$

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta 3} + e^{-i3\theta}\right) + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right)$$

On a : $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$ donc :

$$= \frac{1}{8}\left(2\cos 3\theta + 3\times 2\cos\theta\right) = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

3) $\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$?

On a : $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Donc :

$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3 - 3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2 - \left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\sin^3\theta = -\frac{1}{8i}\left(e^{i\theta 3} - 3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta} - e^{-i3\theta}\right)$$

$$\sin^3\theta = -\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta 3} - e^{-i3\theta}\right) - 3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right)$$

Et on a : $2i\sin n\theta = e^{in\theta} - e^{-in\theta}$ donc :

$$= -\frac{1}{8i}\left(2i\sin 3\theta - 3\times 2i\sin\theta\right) = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

II) LES EQUATION DU SECOND DEGRE

Propriété : Considérons dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c =$ (E) où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

on a :

Si Δ = 0 alors l'équation (E) admet comme solution le complexe $z = -\frac{b}{2a}$

Si Δ ≠ 0 l'équation (E) admet comme solution les complexes $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ où δ une racine carrées de Δ

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Remarque : Si les coefficients a, $b$et c sont des réels et $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c =$ admet deux racines complexes conjugué $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exemple: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

1) $(E): z^2 - z + 2 = 0$
2) $(E): z^2 - z - 2 = 0$
3) $(E): z^2 - 2z + 1 = 0$

Solution :1) $(E): z^2 - z + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2) = -7 = \left(i\sqrt{7}\right)^2$

Donc les solutions sont : $z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Donc : $S = \left\{\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{7}}{2}; \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right\}$

2) $(E): z^2 - z - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-2) = 9 = (3)^2$

Donc les solutions sont : $z_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ e

$z_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$

Donc : $S = \{-1; 2\}$

3) $(E): z^2 - 2z + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 = 0$

L'équation (E) admet comme solution le complexe

$z = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2} = 1$ donc : $S = \{1\}$

Propriété : Si l'équation (E) admet deux racines distinctes z_1 et z_2 alors $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$et $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$

Exemple: soit $z \in \mathbb{C}$ on pose : $P(z) = z^2 - 2z + 2$

1)calculer : $P(1-i)$

2)en déduire dans $\mathbb{C}$ la résolution de l'équations

$P(z) = 0$

Solution :1)

$P(1-i) = (1-i)^2 - 2(1-i) + 2 = -2i - 2 + 2i + 2 = 0$

Donc $z_1 = 1-i$ est une racine de de l'équations

$P(z) = 0$ et on a : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ donc :

$1 - i + z_2 = -\frac{-2}{1}$ donc $z_2 = 2 + i - 1 = 1 + i$

Par suite : $S = \{1-i; 1+i\}$

Exercice2 :Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $(z^2+9)(z^2-4) = 0$

2) $z^2 - 6z + 13 = 0$

Solution :

1) $(z^2+9)(z^2-4) = 0$ ssi $z^2 - 4 = 0$ ou $z^2 + 9 = 0$

Ssi $z^2 = 4$ ou $z^2 = -9$

Ssi $z = \sqrt{4}$ ou $z = -\sqrt{4}$ ou $z = \sqrt{9}i$ ou $z = -\sqrt{9}i$

Ssi : $z = 2$ ou $z = -2$ ou $z = 3i$ ou $z = -3i$

Donc : $S = \{-3i; 3i; -2; 2\}$

2) $z^2 - 6z + 13 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(13) = 36 - 52 = (4i)^2$

Donc les solutions sont : $z_1 = \frac{6+4i}{2} = 3 + 2i$

Et $z_2 = \overline{z_1} = 3 - 2i$ donc : $S = \{3-2i; 3+2i\}$

Exercice5 : soit : $z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1)Donner la forme exponentielle et la forme algébrique du nombre complexes z

2)en déduire : $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Solution : 1) $z = e^{-i\pi}\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\pi} = e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

$z = -\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = -\dfrac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4} = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

$\boxed{z = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + i\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}}$

2) $\sin\dfrac{-11\pi}{12} = \dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$ et $\cos\dfrac{-11\pi}{12} = -\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$

Donc : $\boxed{\cos\dfrac{11\pi}{12} = -\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}}$ et $\boxed{\sin\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}}$

III)LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) La translation

1.1 Définition géométrique.

Soit $\vec{u}$ un vecteur on appelle translation la transformation dans le plan qui associe à tout point M du plan le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

1.2 Ecriture complexe d'une translation.

Propriété : Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que :

$aff(\vec{u}) = a$; la Translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ si et seulement si : $z' = z + a$

Cette égalité s'appelle l'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ tel que $\boldsymbol{aff(\vec{u}) = a}$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Exemple: Dans le plan complexe $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points : A ;B ;C d'affixe respectivement $z_A = 3+5i$; $z_B = 3-5i$; $z_C = 7+3i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $aff(\vec{u}) = 4-2i$

1)montrer que : $z' = z+4-2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$)

2) verifier que le Point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3) déterminer $z_{B'}$ l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$

Solution:1) $T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow z_{M'} - z_M = z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z_{M'} = z_M + z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$

$\Leftrightarrow z' = z+4-2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$)

2)on a : $z_A = 3+5i$

Donc : $z' = 3+5i+4-2i$

Donc : $z' = 7+3i = z_C$

Donc: le point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3)on a : $z_B = 3-5i$ Donc : $z' = 3-5i+4-2i$

$\Leftrightarrow z' = 7-7i = z_{B'}$

Donc l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$ est $z_{B'} = 7-7i$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

2) L'homothétie

2.1 Définition géométrique.

Définition : Soient $\Omega(\omega)$ un point dans le plan et k un réel non nul ; on appelle l'homothétie de centre $\boldsymbol{\Omega}$ et de rapport $\boldsymbol{k}$,la transformation dans le plan qui associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$ et se note $h(\Omega, k)$

2.2 Ecriture complexe d'une homothétie.

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z_{M'} - z_\Omega = k\left(z_M - z_\Omega\right) \Leftrightarrow z' - \omega = k\left(z - \omega\right)$$

$$z' = kz + \omega\left(1 - k\right)$$

Propriété: l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport k, admet une écriture complexe de la forme: $z' = kz + \omega(1 - k)$

Exemple: : Dans le plan complexe $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère le points : A d'affixe $z_A = 3+5i$ et soit z' l'affixe de M' l'image de M $\left(z\right)$ par l'homothétie de centre $\Omega(3;-2)$) et de Rapport $\boldsymbol{k} = 4$

1)montrer que : $z' = 4z - 9 + 6i$ (l'écriture complexe de l'homothétie $h(\Omega, k)$)

2) déterminer $z_{A'}$ l'affixe de A' l'image de A par l'homothétie $h(\Omega, k)$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Solution: 1) $h_{(\Omega;k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z_{M'} = kz_M + z_\Omega(1-k)$

$\Leftrightarrow z' = 4z + z_\Omega(1-4) \Leftrightarrow z' = 4z - 3(3-2i)$

$\Leftrightarrow z' = 4z - 9 + 6i$

2) on a : $z_A = 3+5i$ et $z' = 4z - 9 + 6i$

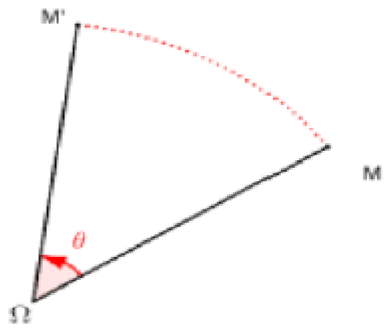
Donc : $z' = 4(3+5i) - 9 + 6i$

Donc $z_{A'} = 3 + 26i$

3) La rotation

3.1 Définition géométrique

Definition: Soit Ω un point dans le plan et θ un nombre réel, la Rotation de centre $\boldsymbol{\Omega}$ et d'angle $\boldsymbol{\theta}$ est l'application qui transforme tout point M en M' tel que:



$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

On la note par : $R\ (\Omega, \theta)$

3.2 L'écriture complexe d'une rotation

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_M - z_\Omega| = |z_{M'} - z_\Omega| \\ \arg\left(\dfrac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega} = e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z' = (z - \omega)e^{\theta i} + \omega$$

On écrit que le rapport a pour module 1 et argument e^{io}

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Propriété : La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ, admet une écriture complexe de la forme :

$z' = (z-\omega)e^{\theta i} + \omega$

Exemple: Dans le plan complexe direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points : A ;B d'affixe respectivement $z_A = 7+2i$; $z_B = 4+8i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1)montrer que : $z' = iz + 4i + 12$ (l'écriture complexe de la rotation r)

2) montrer que l'affixe du point C l'image de A par la rotation r est $z_C = 10+11i$

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z_{M'} = e^{i\alpha}(z_M - z_B) + z_B$

$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-4-8i)+4+8i$

$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z-4-8i)+z$

$\Leftrightarrow z' = i(z-4-8i)+4+8i$

$\Leftrightarrow z' = iz - 4i + 8 + 4 + 8i$

$\Leftrightarrow z' = iz + 4i + 12$

2)on a : $z_A = 7+2i$

Donc : $z' = i(7+2i)+4i+12$

Donc : $z' = 7i - 2 + 4i + 12 = 11i + 10$ cqfd

Exercice6 :Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω (1+i) et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\alpha}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{3\pi}{4}}(z-1-i)+1+i$

$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)(z-1-i)+1+i$

$\Leftrightarrow z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z-1-i)+1+i$

$\Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z + \sqrt{2} + 1 + i$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Exercice7 : Soit la rotation r de centre **Ω** (i) et transforme O en $O'\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Déterminer L'angle de cette rotation

Solution : $r(M)=M' \Leftrightarrow z' = e^{i\alpha}\left(z-z_{\Omega}\right)+z_{\Omega}$

$\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}\left(z-i\right)+i$

Et puisque : $r(0)=0'$ alors : $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\theta}\left(0-i\right)+i$

$\Leftrightarrow e^{i\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{0-i} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Donc : $\theta \equiv \frac{-\pi}{3}\left[2\pi\right]$

L'angle de cette rotation est $-\frac{\pi}{3}$

4) Etude de la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que: $z' = az + b$

Propriété1 : La transformation plane f qui associe à tout point $M(z)$ le point M' (z')tel que $z' = z + b$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ tel que $aff(\vec{u}) = b$

Propriété2 : La transformation plane f qui associe à tout point $M(z)$le point M' (z')tel que $z' = az + b$ où a est un complexe tel que $|a| = 1$ est la rotation d'angle $\alpha \equiv arg(a)$ $[2\pi]$ et de centre $\Omega(\omega)$

tel que $\Omega(\omega = \frac{b}{1-a})$

Propriété3 : Soit a un complexe $(a \notin \mathbb{R})$. La transformation plane f qui transforme $M(z)$ en M' (z') tel que : $z' = az + b$ est la composition de la rotation R et de l'homothétie h ; $f = hoR$ où :

1) R est la rotation d'angle $\alpha \equiv arg(a)$ $[2\pi]$ et de centre $\Omega(\omega)$ où $\omega = \frac{b}{|a|-a}$

2) h est l'homothétie rapport $r = |a|$ et de centre $O(0)$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Les nombres complexes (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / Bac International

Exercice 8: Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que

$$z' = -2z + 3 - 3i$$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques

Solution : Soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a :Le point $\Omega(\omega)$ est

un point invariant par f: $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3-3i}{3} = 1-i$

D'où: $\begin{cases} z' = -2z + 3 - 3i \\ \omega = -2\omega + 3 - 3i \end{cases}$ en faisant la différence on

obtient : $z' - \omega = -2(z - \omega)$ qui se traduit par

$\overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$ Donc :f est l'homothétie de centre

$\Omega(\omega = 1-i)$ et de Rapport -2