Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1ère et 2ème Bac International SM

Un solide indéformable est en rotation autour d'un axe fixe si tous ses points décrivent des trajectoires circulaires centrés sur cet axe, ils ont la même vitesse angulaire, sauf les points situés sur l'axe.

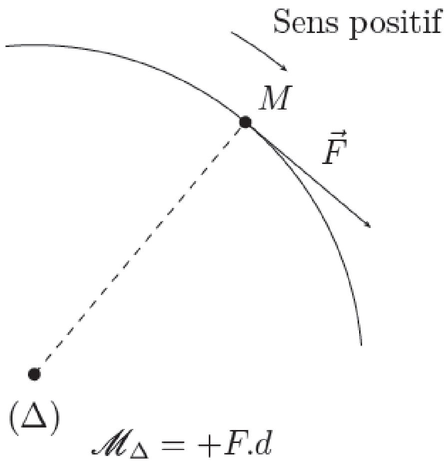
Moment d'une force

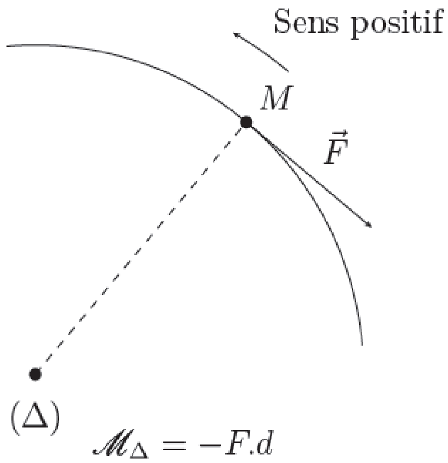
Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe fixe (Δ), est le produit de l'intensité de cette force par la distance qui sépare la droite d'action de la force et l'axe de rotation

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F.d$$

C'est la grandeur qui traduit l'aptitude de cette force de faire tourner un système mécanique autour d'un axe.

Le signe dépend du sens de rotation, si la force tourne le solide dans le sens positif alors le signe est positif, sinon le signe du M_Δ est négatif. Son unité est N.m





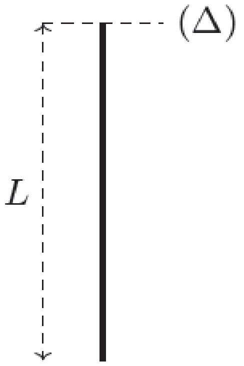
Moment d'inertie

Le moment d'inertie (J) **mesure la résistance d'un corps à un changement de sa vitesse de rotation**, l'équivalent de la masse en translation. Il dépend de

- la masse de l'objet
- de sa répartition (plus la masse est éloignée de l'axe, plus J est grand)
- de l'axe de rotation lui-même

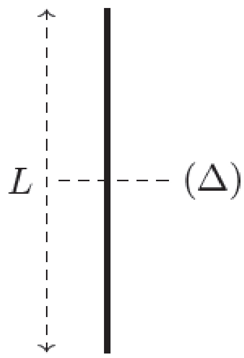
L'unité SI étant le kg·m²

Tige



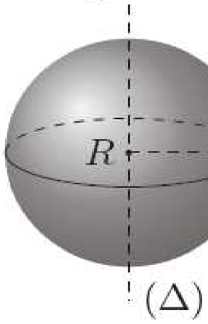
$$J_\Delta = \frac{1}{3} m L^2$$

Tige



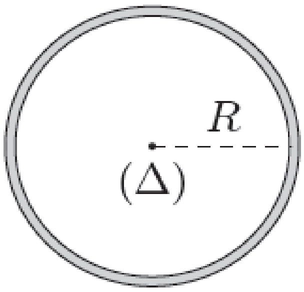
$$J_\Delta = \frac{1}{12} m L^2$$

Sphère



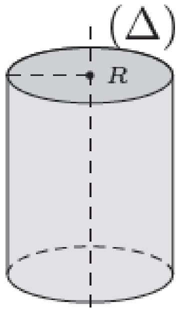
$$J_\Delta = \frac{2}{5} m r^2$$

Anneau



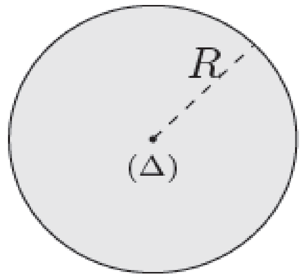
$$J_\Delta = m r^2$$

Cylindre



$$J_\Delta = \frac{1}{2} m r^2$$

Disque



$$J_\Delta = \frac{1}{2} m r^2$$

L'abscisse, vitesse et accélération angulaires

On peut repérer la position du point appartenant à un solide par l'angle θ formé d'un vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ avec un axe une direction référentielle, le plus souvent l'axe $\overrightarrow{Ox}$, l'angle est donc $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OM}}\right)$, son unité est (rad).

Sa relation avec l'abscisse curviligne s est :

$$\boxed{s = \widehat{OM} = R.\theta}$$

On définit la vitesse angulaire comme la dérivée de l'abscisse angulaire par rapport au temps , Son unité **rad.s^{-1}** . La relation entre la vitesse angulaire et la vitesse linéaire est

$$\boxed{\omega = \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}} \qquad \dot{\theta} = \frac{v}{R}$$

L'accélération angulaire comme la dérivée de la vitesse par rapport au temps

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \qquad \vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{n}$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}R\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = R\ddot{\theta}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\dot{\theta}^2}{R} = R\dot{\theta}^2$$

$$a_n = R\dot{\theta}^2 \qquad \text{et} \qquad a_t = R\ddot{\theta}$$

Mouvement de rotation uniforme

Le mouvement de rotation uniforme est un mouvement dans lequel l'accélération angulaire est nulle, et la vitesse est constante, son équation horaire

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

Où θ_0 est l'abscisse angulaire à l'origine des dates.

Mouvement de rotation uniformément varié

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \qquad \dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0 \qquad 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0) = \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2$$

Relation indépendante du temps
A démontrer…allez-y

Le principe fondamental de la dynamique

La somme des moments des forces extérieures qui s'exercent sur un solide en rotation autour d'un axe fixe（Δ）est égale au produit du moment d'inertie du solide et son accélération angulaire

$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

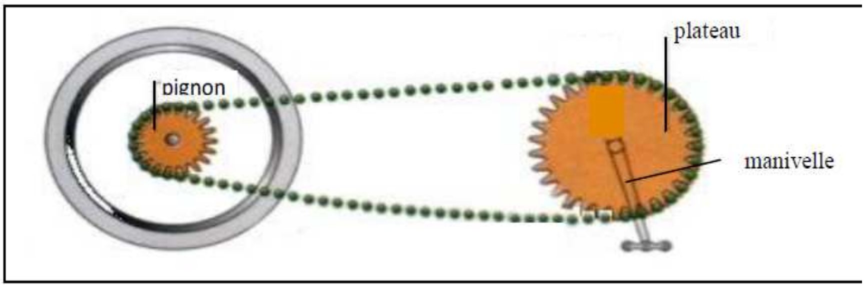
Remarques :
Si $\ddot{\theta} = 0$, alors le mouvement de rotation est uniforme autour de l'axe fixe (Δ), est le système étudié est en équilibre.
Si $\ddot{\theta} = \mathrm{C^{te}}$, alors le mouvement de rotation est uniformément varié autour de l'axe fixe (Δ).

Applications

Exercice 1 :

Une bicyclette a des roues de diamètre 69 cm. Le pignon arrière a 12 dents et le plateau du pédalier a 40 dents. L'entraxe de la manivelle du pédalier mesure 17 cm.

La vitesse de la bicyclette est de 20 $km.h^{-1}$.



1- En mouvement les deux roues de la bicyclette ne glissent pas sur le sol. Quelle est alors la conséquence sur la vitesse :

a)- angulaire des roues arrière et avant ?

b)- linéaire d'un point de la circonférence des deux roues ?

2- Calculer la vitesse angulaire ω_R de la roue arrière.

3- Déterminer la vitesse linéaire v_R d'un point situé sur la circonférence du pignon de diamètre 6 cm de la roue arrière.

4- Quelle est la vitesse linéaire v_P d'un point de la circonférence du plateau du pédalier ?

5- Quelle est la vitesse linéaire v de l'axe de la pédale ?

6- a)- Déterminer le diamètre D_P du plateau en considérant que le diamètre est proportionnel au nombre de dents.

b)- Calculer la vitesse angulaire ω_P du plateau de diamètre 20 cm.

c)- Quelle est la vitesse angulaire ω_A de la manivelle du pédalier ?

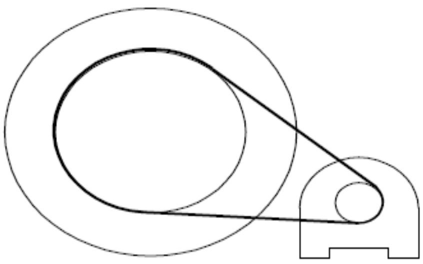
d)- En déduire la vitesse linéaire v_A de l'axe de la pédale.Conclure.

Exercice 2

I- Le tambour d'une machine à laver est entraîné par un moteur électrique.

La transmission du mouvement est assurée par une courroie tournant sans glissement.

La fréquence de rotation du moteur est N_A = 3000 tr/min.



La poulie du moteur a un diamètre D_A = 10 cm et la poulie du tambour D_B = 40 cm.

1- Convertir la fréquence de rotation du moteur en tours par seconde.

2- Déterminer la vitesse angulaire ω_A du moteur en rad/s.

3- Calculer la vitesse linéaire d'un point de la courroie en m/s et en km/h.

4- Déterminer la vitesse angulaire ω_B du tambour.

5- En déduire la fréquence de rotation N_B du tambour exprimée en tr/min.

6- Quelle est la relation littérale entre les fréquences de rotation N_A et N_B du moteur et du tambour.

7- Calculer la vitesse d'un point de la circonférence du tambour de diamètre D_T = 100 cm.

Corrigé

Exercice 1 :

1-Les deux roues ont la même vitesse angulaire et les points de leur circonférence ont la même vitesse linéaire.

2-Vitesse linéaire d'un point de la roue : il faut convertir la vitesse en $m.s^{-1}$

$$v = \frac{20}{3,6} \approx 5,555\ m.s^{-1} \qquad \mathbf{v \approx 5,6\ m.s^{-1}}$$

Vitesse angulaire ω_R de la roue arrière :

$$\omega_R = \frac{v}{R} \qquad \omega_R = \frac{5,6}{0,345} \qquad \boldsymbol{\omega_R \approx 16\ rad.s^{-1}}$$

3-Vitesse linéaire v_R d'un point du pignon : la roue arrière et le pignon constituent un solide , donc ils ont la même vitesse angulaire ω_R :

d'où : $v_R = R_R\,\omega_R \qquad v_R = 3.10^{-2} \times 16 \qquad \mathbf{v_R \approx 0,48\ m.s^{-1}}$

4- La transmission entre le pignon et le pédalier est assurée par la chaîne, donc chaque point de la chaine a la vitesse linéaire et par conséquent les points de la circonférence du pignon et du pédalier ont la même vitesse. $\mathbf{v_R = v_P}$

5- L'axe de la pédale a pour vitesse linéaire : $v = R_A\,\omega_R \qquad v_A = 0,17 \times 16 \qquad \mathbf{v_A \approx 2,72\ m.s^{-1}}$

6- a)- Diamètre et nombre de dents sont proportionnels

On pose D le diamètre du pédalier et on écrit la proportion :

$$\frac{D}{40} = \frac{6}{12} \qquad \text{soit } D = \frac{6 \times 40}{12}$$

Le diamètre du pédalier est de 20 cm.

b)- Vitesse angulaire ω_P du pédalier : $\omega_P = \frac{v_P}{R_P} \qquad \omega_P = \frac{0,48}{0,10} \qquad \boldsymbol{\omega_P = 4,8\ rad.s^{-1}}$

c)- La manivelle du pédalier a la même vitesse angulaire que le plateau. $\omega_P = \omega_A$ soit

$\boldsymbol{\omega_A = 4,8\ rad.s^{-1}}$

d)- L'axe de la pédale a pour vitesse linéaire : $v_A = R_A\,\omega_A \qquad v_A = 0,17 \times 4,8 \qquad \mathbf{v_A \approx 0,82\ m.s^{-}}$

on a : $v > v_A$ le cycliste développe une vitesse plus petite pour un diamètre du pédalier petit !

Exercice 2

I- La fréquence de rotation du moteur est $N_A = 3000$ tr/min.

La poulie du moteur a un diamètre $D_A = 10$ cm et la poulie du tambour $D_B = 40$ cm.

1- Fréquence de rotation $N_A = \dfrac{3000}{60}$ $\quad$ $N_A = 50$ **tr/s**

2- Vitesse angulaire $\omega_A = 2\,\pi\,N_A$ $\quad \omega_A = 100\,\pi$ $\quad \omega_A \approx 314$ **rad/s.**

3- La vitesse linéaire de la courroie : $v = R\,\omega_A = \dfrac{D_A}{2}\,\omega_A$ $\quad v = 5.10^{-2} \times 314$ $\quad v \approx 15{,}7$ **m/s**

$v \approx 56{,}52$ **km/h**

4- La courroie a la même vitesse linéaire en tout point de sa trajectoire soit $v_A = v_B = v$.

$\omega_B = \dfrac{v_B}{R_B} = \dfrac{v}{R_B}$ $\quad \omega_B = \dfrac{15{,}7}{20.10^{-2}}$ $\quad \omega_B \approx 78{,}5$ **rad/s**

5- Fréquence de rotation $N_B = \dfrac{\omega_B}{2\,\pi}$ $\quad N_B = \dfrac{78{,}5}{2\,\pi}$ $\quad N_B \approx 12{,}5$ **tr/s.**

Relation des poulies : on a $\boldsymbol{v_A = v_B}$ soit $\boldsymbol{R_A\omega_A = R_B\omega_B}$ ou $\boldsymbol{2R_A\omega_A = 2R_B\omega_B}$

càd $\boldsymbol{D_A\omega_A = D_B\omega_B}$ d'où : $\boldsymbol{D_A 2\pi N_A = D_B 2\pi N_B}$

donc $N_A \times D_A = N_B \times D_B$

6- Vitesse d'un point de la circonférence du tambour $D_T = 100$ cm

2 méthodes $v = 2\,\pi\,R\,N_B$ $\quad v = 2\,\pi \times 0{,}5 \times 12{,}5$ $\quad v \approx 39{,}26$ **m/s**

ou $v = R\,\omega_B$ $\quad v = 0{,}5 \times 78{,}5$ $\quad v \approx 39{,}25$ **m/s**