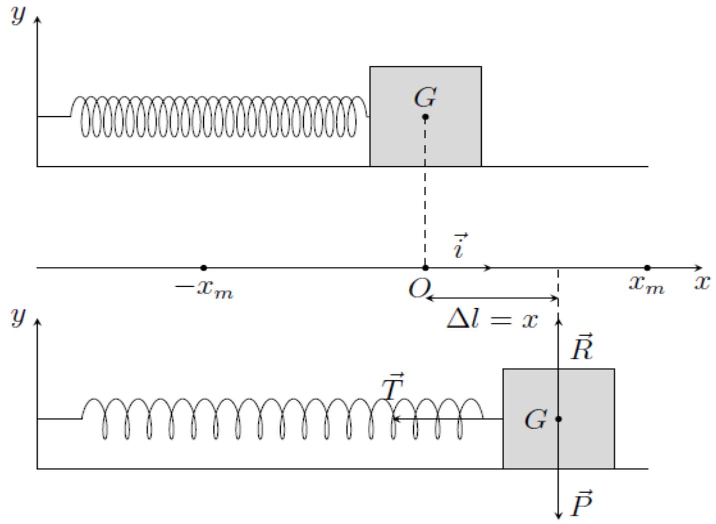
Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Systèmes mécaniques oscillants + aspect énergétique (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1ère et 2ème Bac International SM

Un système oscillant, est tout simplement un corps ou plusieurs corps, effectuent un mouvement d'aller-retour autour de son position d'équilibre

Pendule élastique horizontale

Sur un plan lisse on attache à l'extrémité d'un ressort de spires non jointives et de masse négligeable, un corps (S) de masse m, on l'écarte de sa position d'équilibre, et on le lâche sans vitesse initiale, le solide effectue donc un mouvement rectiligne oscillatoire



Le système étudié : $\{(S)\}$

Bilan des forces

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids du corps} \\ \vec{R} : & \text{La réaction du plan} \\ \vec{T} : & \text{La tension du ressort} \end{cases}$$

Dans le référentiel terrestre supposée galiléen on associe le repère (Ox), On applique la deuxième loi de Newton :

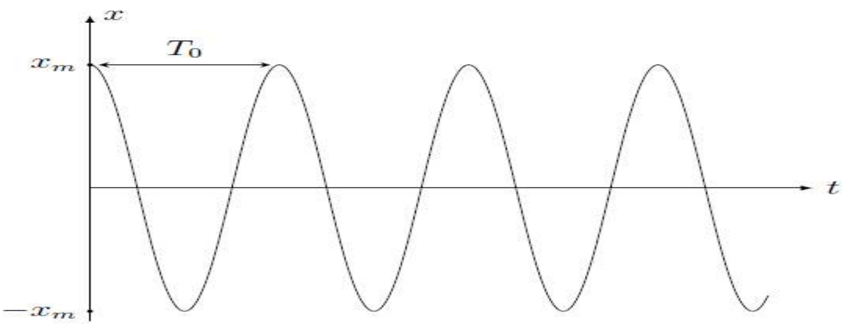
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a} \qquad -kx = m\ddot{x}$$

$$\boxed{\frac{k}{m}x + \ddot{x} = 0}$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre, sa solution s'écrit sous forme :

$$\boxed{x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)}$$

$$\begin{cases} x_m & \text{Amplitude maximale en (m)} \\ T_0 & \text{La période propre des oscillations (s)} \\ \varphi & \text{Phase à l'origine des dates en (rad)} \end{cases}$$



$$\dot{x} = -x_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \qquad x_m \frac{2\pi}{T_0} = \dot{x}_m$$

$$\boxed{\dot{x} = -\dot{x}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)}$$

$$\ddot{x} = -\frac{2\pi}{T_0}\dot{x}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \qquad \frac{2\pi}{T_0}\dot{x}_m = \ddot{x}_m$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\ddot{x}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)}$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x}$$

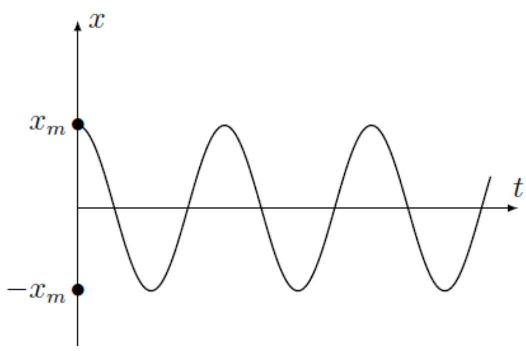
Démonstration ….à vous!

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \qquad \frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Détermination de φ : (Dépond de la position de x à t=0)

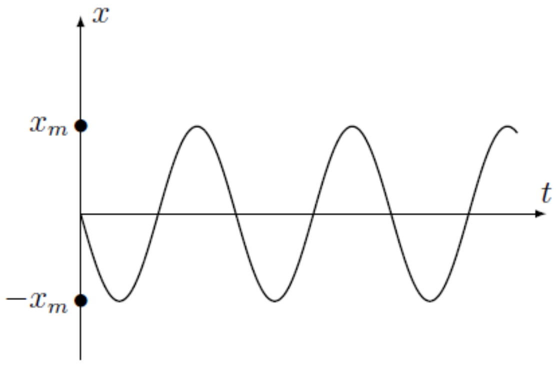
À $t = 0$ on a $x = x_m$:



La solution est $\varphi = 0$.

Démonstration ….écrire x(0)…

À $t = 0$ on a $x = 0$.



$0 = \cos(\varphi)$ La solution est $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. Dérivons x et trouvons la réponse correcte

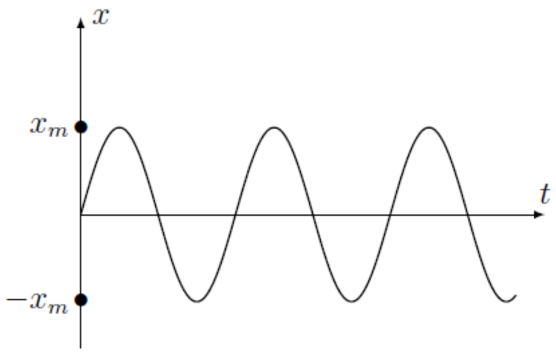
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right) \qquad = -x_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = -x_m\frac{2\pi}{T_0}\sin(\varphi)$$

Or cette expression doit être négative

$$\sin(\varphi) > 0 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

À $t = 0$ on a $x = 0$



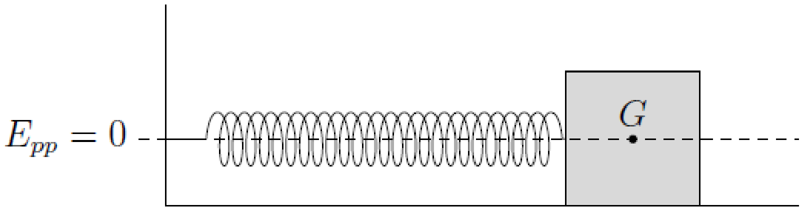
$0 = \cos(\varphi)$ La solution est $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. Dérivons x et trouvons la réponse correcte

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right) \qquad = -x_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = -x_m \frac{2\pi}{T_0}\sin(\varphi)$$

Or cette expression doit être positive alors : $\sin(\varphi) < 0 \Longrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$

Étude énergétique



L'énergie cinétique : C'est l'énergie qu'un corps possède du fait de son mouvement, son unité est Joules (J), elle est donné par la relation suivante

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle : C'est l'énergie que possède le corps potentiellement, et capable d'être transformé en autre forme d'énergie, son unité est Joules (J), dans notre cas c'est la somme de l'énergie potentielle du pesanteur, et potentielle élastique, en choisissant l'axe passant par le centre d'inertie G comme l'origine de l'énergie, on obtient : $E_{pp} = mg(z_0 - z_0) = 0$. Pour l'énergie élastique, son expression est :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

On prend $E_{pe} = 0$ lorsque $x = 0$, donc $C = 0$ et :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

L'énergie mécanique : C'est l'énergie totale du système mécanique, emmagasinée comme énergie potentielle et cinétique, son unité est Joules (J)

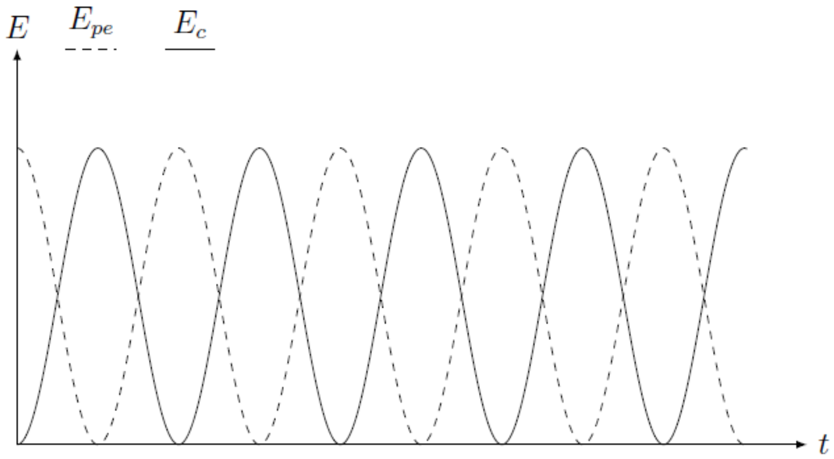
$$E_m = E_c + E_p$$

Lorsque les frottements sont absents, l'énergie mécanique se conserve

$$E_m = E_p + E_c \quad = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\boxed{\frac{k}{m}x + \ddot{x} = 0}$$

Démonstration ...."Écrire que la dérivée de l'énergie mécanique est nulle"



Le travail de la tension du ressort

$$\underset{A \to B}{W}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F}.\mathrm{d}\vec{l}$$

Formule générale du travail

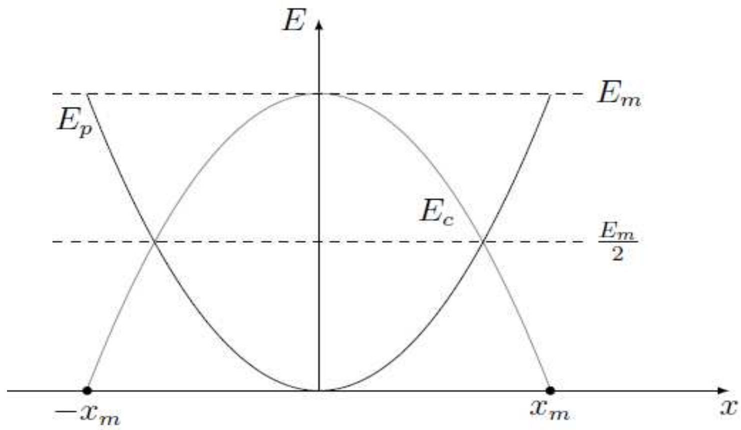
$$= \int_A^B -kx\mathrm{d}x \qquad = -k\frac{x^2}{2}\bigg|_{x_A}^{x_B} \qquad = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

$$\boxed{\underset{A \to B}{W}\left(\vec{T}\right) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2)}$$

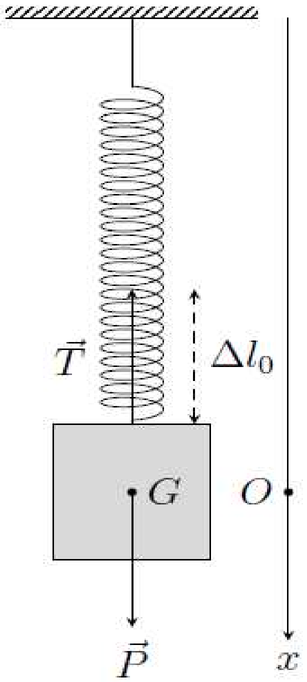
Travail de la force de rappel lorsque le point d'application se déplace d'un point A à B

$$\Delta E_{pe} = E_{pe_f} - E_{pe_i} \qquad = \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) \qquad \boxed{= -W\left(\vec{T}\right)}$$

On retrouve un résultat analogue à celui de l'énergie potentielle de pesanteur dont la ***diminution*** *(l'opposé de la variation) est le travail de la force conservative* $\vec{P}$



Pendule élastique vertical



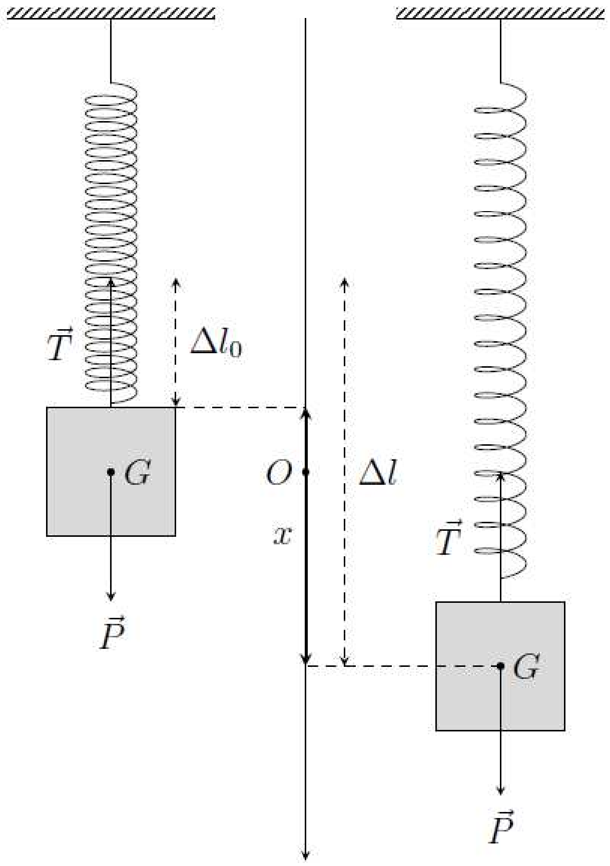
Système étudié : $\{(S)\}$
Bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids du corps} \\ \vec{T} : & \text{La tension du ressort} \end{cases}$$

Dans le référentiel terrestre supposée galiléen on associe le repère (Ox), On applique la première loi de Newton :

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{T} &= \vec{0} \\ P - T &= 0 \\ mg &= k\Delta l_0 \\ \Delta l_0 &= \frac{mg}{k} \end{aligned}$$

En allongeant le corps (S) vers le bas, il effectue un mouvement oscillatoire…

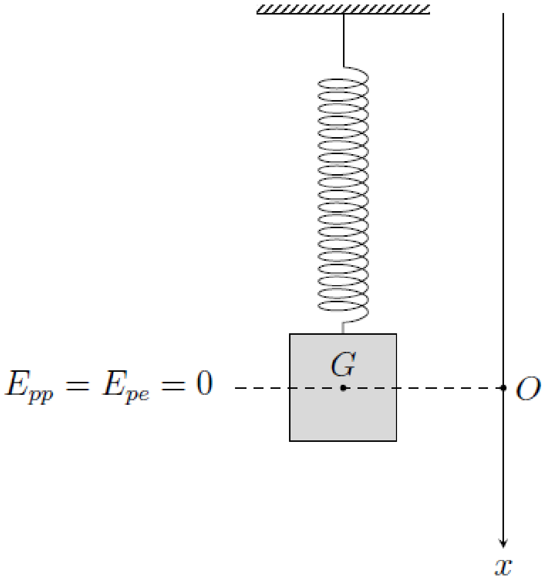


$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{P} + \vec{T} &= m\vec{a} \\ mg - k\Delta l &= m\ddot{x} \\ mg - k\left(\frac{mg}{k} + x\right) &= m\ddot{x} \\ mg - mg - kx &= m\ddot{x} \\ m\ddot{x} + kx &= 0 \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \end{aligned}$$

C'est la même équation différentielle obtenue dans la section précédente, sa solution est toujours de la forme

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Étude énergétique



Énergie potentielle de pesenteur : On considère que lorsque le système est en équilibre $E_{pe} = 0$, ainsi que le plan passant par G à l'équilibre, constitue l'état référentiel de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$

$E_{pp} = -mgx + C$ Lorsque $x = x_G = 0$ on a $E_{pp} = 0$

$-mgx_G + C = 0$ $C = 0$ $\boxed{E_{pp} = -mgx}$

L'énergie potentielle élastique :

$E_{pe} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + C$ $\Delta l = \Delta l_0 + x$

Lorsque le système est en équilibre on a : $E_{pe} = 0$

$$C = -\frac{1}{2}\Delta l_0^2$$

$$\begin{aligned}E_{pe} &= \frac{1}{2}k\Delta l^2 - \frac{1}{2}k\Delta l_0 \\ &= \frac{1}{2}k\left((\Delta l_0 + x)^2 - \Delta l_0^2\right) \\ &= \frac{1}{2}k(\Delta l_0^2 + 2\Delta l_0 x + x^2 - \Delta l_0^2) \\ &= \frac{1}{2}kx^2 + k\Delta l_0 x\end{aligned}$$

$$E_p = -mgx + \frac{1}{2}kx^2 + k\Delta l_0 x \qquad = x\left(\underbrace{k\Delta l_0 - mg}_{0} + \frac{1}{2}kx\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}kx^2}$$

Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Énergie mécanique

$$= \frac{1}{2}(kx^2 + m\dot{x}^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{1}{2}(2kx\dot{x} + 2m\dot{x}\ddot{x}) = 0$$

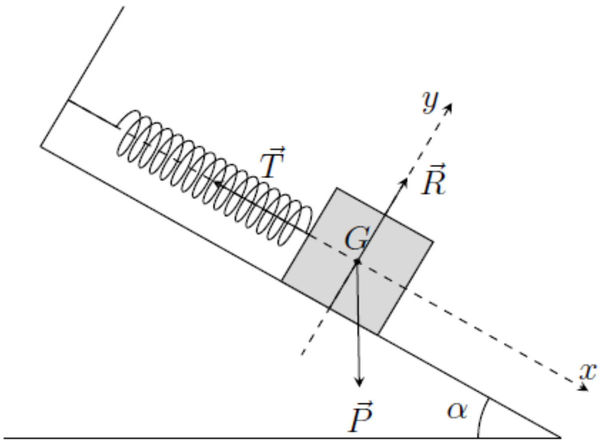
$$\dot{x}(kx + m\ddot{x}) = 0$$

$$\boxed{\frac{k}{m}x + \ddot{x} = 0}$$

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Pendule élastique incliné

Dans un plan lisse incliné d'un angle α, on attache à l'extrémité d'un ressort de spires non jointives et de masse négligeables, un corps (S) de masse m, le ressort s'allonge donc d'une distance Δl_0, on la détermine en étudiant le système à l'équilibre



Le système étudié : $\{(S)\}$

Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids du corps} \\ \vec{T} : & \text{La tension du ressort} \\ \vec{R} : & \text{La réaction du plan} \end{cases}$$

Dans le repère (Gx) associé au référentiel terrestre galiléen, on applique la première loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$$

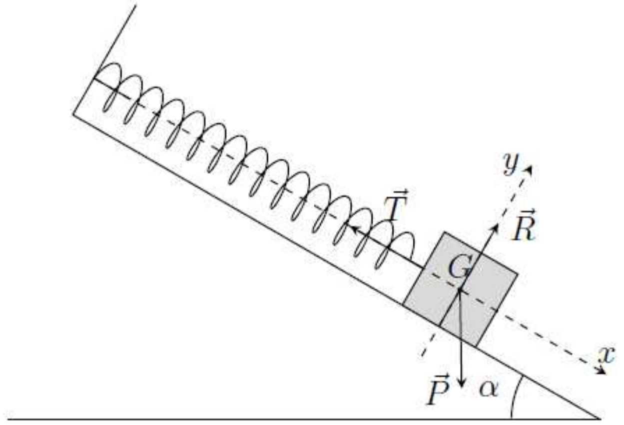
$$P \sin\alpha - T = 0$$

$$P \sin\alpha = T$$

$$k\Delta l_0 = P \sin\alpha$$

$$\Delta l_0 = \frac{mg \sin\alpha}{k}$$

on écarte le corps, et on le lâche sans vitesse initiale …



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

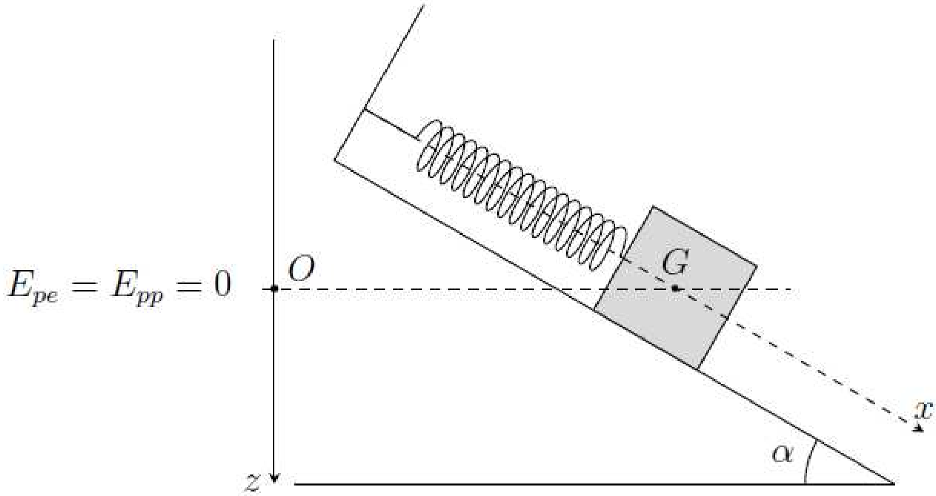
$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids du corps} \\ \vec{T} : & \text{La tension du ressort} \\ \vec{R} : & \text{La réaction du plan} \end{cases}$$

Dans le repère (Gx) associé au référentiel terrestre galiléen, on applique la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$
$$P \sin\alpha - T = m\ddot{x}$$
$$mg \sin\alpha - k\Delta l = m\ddot{x}$$
$$mg \sin\alpha - k(\Delta l_0 + x) = m\ddot{x}$$
$$\underbrace{mg \sin\alpha - k\Delta l_0}_{0} - kx = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + kx = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Étude énergétique



On considère que l'énergie potentielle élastique est nulle $E_{pe} = 0$ lorsque
le système est en équilibre, ainsi que le plan passant par G constitue à l'équilibre l'état référentiel de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$

$$E_{pp} = -mgz + C \qquad C = 0 \qquad E_{pp} = -mgz \qquad \text{Or } z = x\sin\alpha.$$

$$\boxed{E_{pp} = -mgx\sin\alpha}$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + C \qquad C = -\frac{1}{2}k\Delta l_0^2$$

$$\begin{aligned} E_{pe} &= \frac{1}{2}k\Delta l^2 - \frac{1}{2}k\Delta l_0^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left((\Delta l_0 + x)^2 - \Delta l_0^2\right) \\ &= \frac{1}{2}k\left(\Delta l_0^2 + 2\Delta l_0 x + x^2 - \Delta l_0^2\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{pe} = k\Delta l_0 x + \frac{1}{2}kx^2}$$

$$E_p = -mgx\sin\alpha + k\Delta l_0 x + \frac{1}{2}kx^2 \qquad = x\left(\underbrace{k\Delta l_0 - mg\sin\alpha}_{0} + \frac{1}{2}kx\right)$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$$

L'énergie cinétique

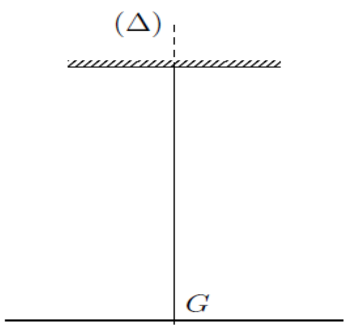
$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Énergie mécanique

$$= \frac{1}{2}(kx^2 + m\dot{x}^2)$$

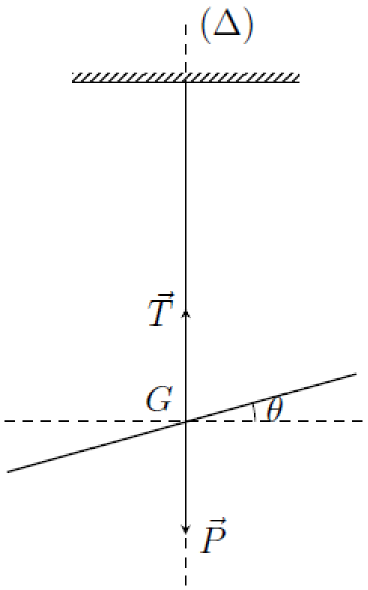
$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \frac{k}{m}x + \ddot{x} = 0 \qquad x = x_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Pendule de torsion



Le pendule de torsion est un système constitué d'une barre (S), attaché à l'extrémité d'un fil par un point G appartenant à l'axe (Δ) qui passe par le centre d'inertie de cette barre.

On écarte la barre de sa position initiale d'équilibre, et on la lâche sans vitesse initiale. Elle effectue donc un mouvement oscillatoire de rotation. On étudie ces oscillations à un instant "t" où la barre se trouve en une position repérée par l'angle "θ".



Le système étudié : $\{(S)\}$

Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids de la barre} \\ \vec{T} : & \text{La tension du fil} \\ C : & \text{Le couple de torsion} \end{cases}$$

le moment du rappel $\mathscr{M} = -C\theta$

C est la constante de torsion qui dépend du fil

$$\sum \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{F}\right) = J_\Delta \ddot{\theta} \qquad \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{P}\right) + \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{T}\right) + \mathscr{M} = J_\Delta \ddot{\theta}$$

Puisque $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont confondues avec (Δ) alors :

$$\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{P}\right) = \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{T}\right) = 0$$

$$\mathscr{M} = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$-C\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$J_\Delta \ddot{\theta} + C\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du seconde ordre, sa solution est :

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\begin{cases} \theta_m & \text{Amplitudeangulaire maximale en (rad)} \\ T_0 & \text{La période propre des oscillations (s)} \\ \varphi & \text{Phase à l'origine des dates en (rad)} \end{cases}$$

Afin d'obtenir l'expression de $\omega = \dot{\theta}$, on dérive par rapport au temps θ :

$$\dot{\theta} = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \qquad \theta_m \frac{2\pi}{T_0} = \dot{\theta}_m$$

$$\boxed{\dot{\theta} = -\dot{\theta}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{2\pi}{T_0}\dot{\theta}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)}$$

$$\frac{2\pi}{T_0}\dot{\theta}_m = \ddot{\theta}_m \qquad \ddot{\theta} = -\ddot{\theta}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

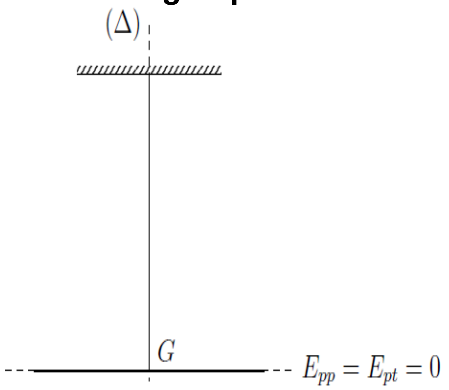
$$\ddot{\theta} = -\ddot{\theta}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{C}{J_\Delta}\theta} \qquad \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}} \qquad \boxed{f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}}$$

Étude énergétique



$$E_p = E_{pp} + E_{pt}$$

On suppose que le plan horizontal passant par G à l'équilibre, constitue l'état référentiel de l'énergie potentielle de pesanteur $Epp = 0$.

Ceci résulte que l'énergie potentielle reste toujours nulle au cours des oscillations

$$E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + C' \qquad E_{pt} = 0 \text{ lorsque } \theta = 0 \qquad C' = 0$$

$$\boxed{E_p = E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2}$$

Énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}$$

Énergie mécanique

$$E_m = E_p + E_c \qquad = \frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$$

Les oscillations sont non-amorties, donc on a un échange entre l'énergie potentielle et cinétique, alors que celle mécanique reste constante.

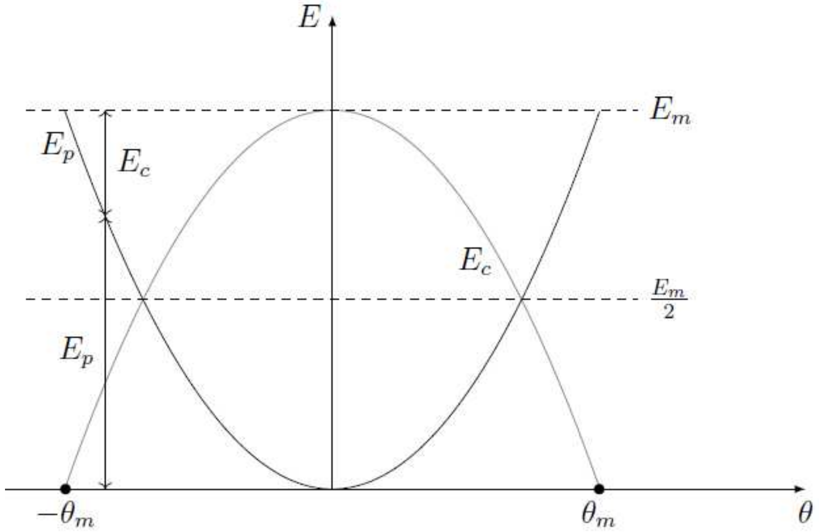
$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2\right) = 0 \qquad C\theta\dot{\theta} + J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0}$$

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

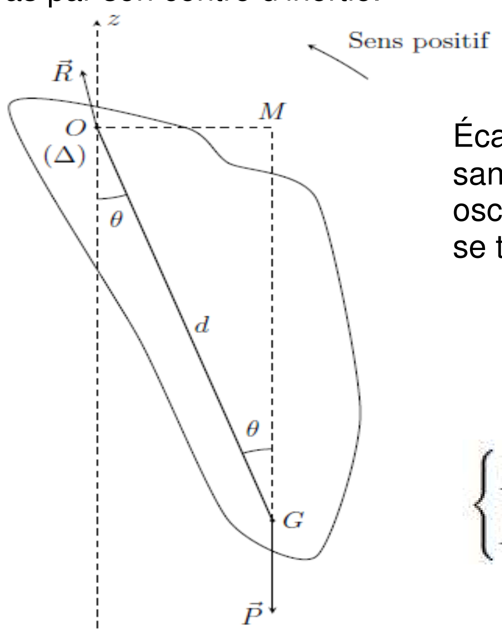
Diagramme d'énergie

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^2 = \frac{1}{2}C\theta_m^2 \qquad \dot{\theta}_m = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}\theta_m$$



Pendule pesant

Le pendule pesant, est tout solide mobile autour un axe (Δ), horizontal et fixe ne passant pas par son centre d'inertie.



Écartons le solide (S) de sa position d'équilibre et lâchons le sans vitesse initiale. Il effectue donc un mouvement oscillatoire. On étudie ces oscillations à un instant t où le solide se trouve en une position repérée par l'angle θ.

$$\sum \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{F}\right) = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{P}\right) + \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{R}\right) = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids de la barre} \\ \vec{R} : & \text{La réaction de l'axe} \end{cases} \qquad -P.OM = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$-mgd\sin\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$J_\Delta \ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0 \Longleftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0$$

Car pour les petits angles on prend toujours comme approximation : $\sin\theta \approx \theta$.

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0 \qquad\qquad \theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

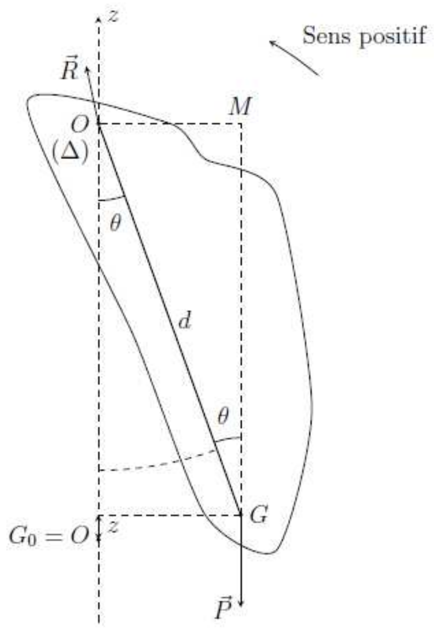
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{J_\Delta}\theta \qquad\qquad \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{mgd}{J_\Delta} \Longleftrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}}$$

Étude énergétique



$$E_p = E_{pp} = mgz + C$$

On suppose que le plan horizontal passant par $O = G_0$ à l'équilibre, comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur

$$E_{pp} = 0 \Longleftrightarrow mgz_0 + C = 0 \Longleftrightarrow C = 0,$$

$$\boxed{E_p = mgz}$$

À un instant t, le solde se trouve en une position repéré par θ

$$\begin{aligned} z &= d - OG_0 \\ &= d - d\cos\theta \\ &= d(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

$$E_p = mgd(1-\cos\theta) \qquad E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}$$

$$E_m = mgd(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$$

Les frottements sont négligeables donc, E_m est conservée

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mgd(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2\right) = 0$$

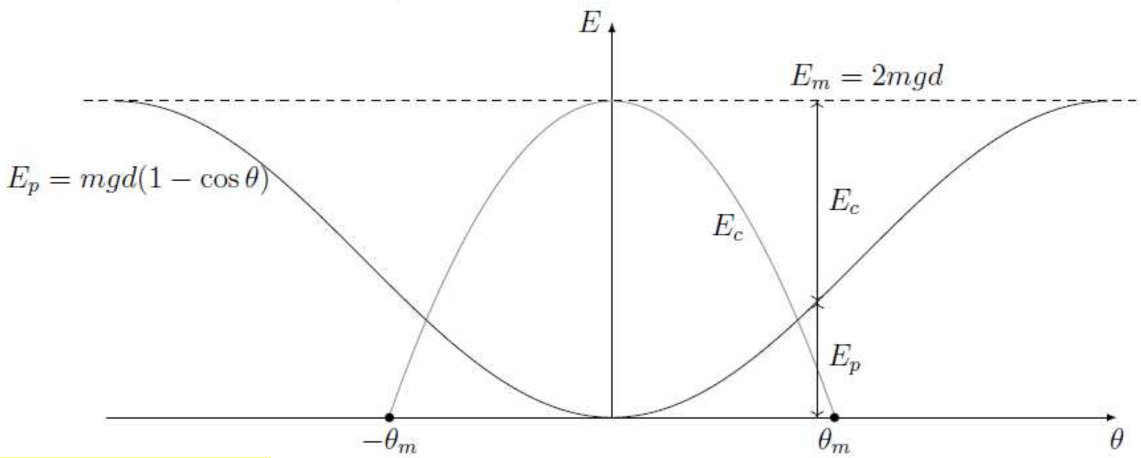
$$mgd\sin(\theta)\,\dot{\theta} + J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

$$J_\Delta\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0}$$

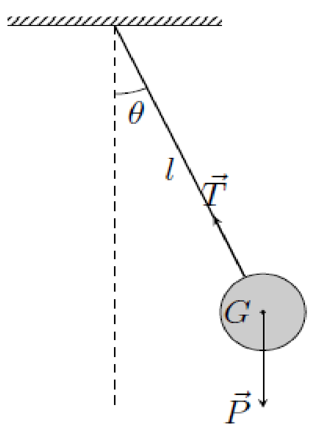
C'est la même équation différentielle obtenue précédemment

$$E_p = mgd(1-\cos\theta)$$



Pendule simple

Le pendule simple est tout point matériel de masse m, qui peut osciller autour d'un axe horizontal fixe (Δ).



Les mêmes étapes à suivre, pour étudier ces oscillations, il faut mentionner que

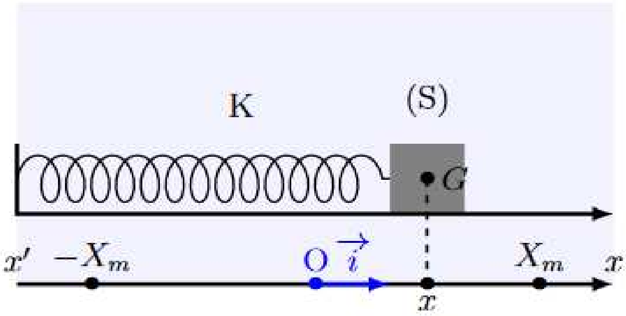
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgl}} \qquad J_\Delta = ml^2 \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Applications

Exercice 1

Exercice 1 résolution analytique de E.D

Un oscillateur mécanique élastique est constitué d'un ressort de constante de raideur $K = 10N/m$ associé à un solide de masse $m = 250g$. On écarte le système de sa position d'équilibre de $2cm$ et on l'abandonne sans vitesse initiale.



On considère un axe $(O, \vec{i})$, avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre et le vecteur unitaire $\vec{i}$ parallèle au déplacement du solide.
On repère la position G du solide à chaque instant par l'élongation $OG = x(t)$.

1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement , à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t + \varphi}\right)$$

(a) Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur .

(b) Déterminer les paramètres X_m et φ , sachant qu' à l'instant t=0 , G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif .Écrire cette solution.

(c) Déterminer la vitesse des oscillation à l'instant t , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions .

(d) Déterminer les caractéristiques de la force $\vec{F}$ exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :
* lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable ;
* lorsque $x = X_m$ et $x = -X_m$

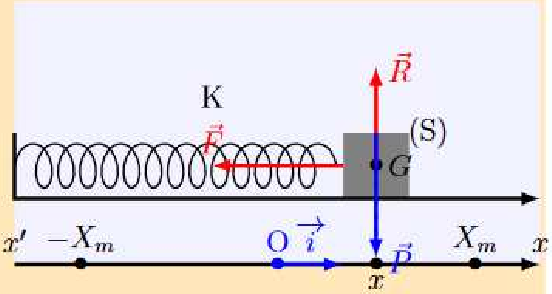
Solution : exercice 1

1. Établissement de l'équation différentielle du mouvement :

Référentiel lié au laboratoire considéré comme Galiléen ;

Système étudié : le solide (S) ;

Bilan des forces exercées sur le système : le poids $\vec{P}$, la réaction du plan horizontal $\vec{R}$ et la tension du ressort $\vec{F} = -K.\vec{\Delta l}$;



On applique la deuxième loi de Newton sur (S) :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}_G$$

On projette la relation sur $x'Ox$:

$$0 + 0 - K.\Delta l = m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

d'où

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}.x = 0}$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t + \varphi}\right)$$

2.1 L'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique :
x(t) solution de l'équation différentielle , donc elle la vérifie , i.e on dérive deux fois x(t) par rapport au temps :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t + \varphi}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} x(t)$$

Pour que x(t) soit solution de l'E.D il suffit que

$$\frac{K}{m} = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

Application numérique : $T_0 \approx 1s$

2.2 On détermine les paramètres X_m et φ , sachant qu' à l'instant t=0 , G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif :
D'après les données de l'exercice on $X_m = 2.10^{-2}m$
En considérant les conditions initiales suivantes : à $t = 0$ on a $x(0) = 0$ passe par la position d'équilibre et $v(0) > 0$;
$X_m cos\varphi = 0$ donc $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$
et puisque la vitesse à t=0 est positive : $-X_m\frac{2\pi}{T_0}sin(\varphi) > 0$ c'est à dire que $sin\varphi < 0$, d'où

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

donc la solution de E.D est :

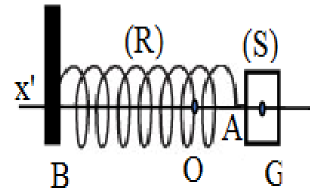
$$\boxed{x(t) = 2 \times 10^{-2}cos\left(2.\pi.t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

2.3 La vitesse des oscillation à l'instant t , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions :
La vitesse des oscillations : $v(t) = -4 \times 10^{-2}\pi sin\left(2.\pi.t - \frac{\pi}{2}\right)$
Cette vitesse est maximale lorsque $sin\left(2.\pi.t - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ i.e que $v_{max} = 4 \times 10^{-2}\pi$

2.4 Les caractéristiques de la force $\vec{F}$ exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :
L'intensité de la force : Est une force de rappel qui s'oppose au sens d'allongement $F(t) = K.x(t)$
* lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable ;
nous avons $x(t) = 0$ donc $Ft) = 0$
* lorsque $x = X_m$ et $x = -X_m$
Pour $x = X_m$ nous avons $\vec{F} = K.X_m\vec{i}$ l'intensité de la force est maximale et dans le même sens que $\vec{i}$.
Pour $x = -X_m$ nous avons $\vec{F} = -K.X_m\vec{i}$ l'intesité est maximale et dans le sens opposé de $\vec{i}$

Exercice 2

Un pendule élastique (R) est constitué d'un solide (S) de masse m, attaché à l'extrémité A d'un ressort horizontal de constante k = 80 N/m ; l'autre extrémité B du ressort est fixée à un support fixe comme l'indique le document (Doc 1) ci-contre.



(Doc 1)

Le centre d'inertie G du solide peut se déplacer le long d'un axe horizontal x'x. A l'équilibre, le centre d'inertie G de (S) est confondu avec l'origine O de l'axe x'x. On déplace le solide à partir de sa position d'équilibre, puis on le lâche sans vitesse à l'instant $t_0 = 0$. G commence à osciller de part et d'autre de sa position d'équilibre O.
A un instant t, l'abscisse de G est x et la mesure algébrique de sa vitesse est $v = \frac{dx}{dt} = x'$.
Le plan horizontal contenant G est le niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur.

1) Oscillations libres non amorties

On néglige la force due au frottement.

1-1) Ecrire, à un instant t, l'expression de l'énergie mécanique du système (pendule, Terre).

1-2) Etablir l'équation différentielle du second ordre en x qui décrit le mouvement de (S).

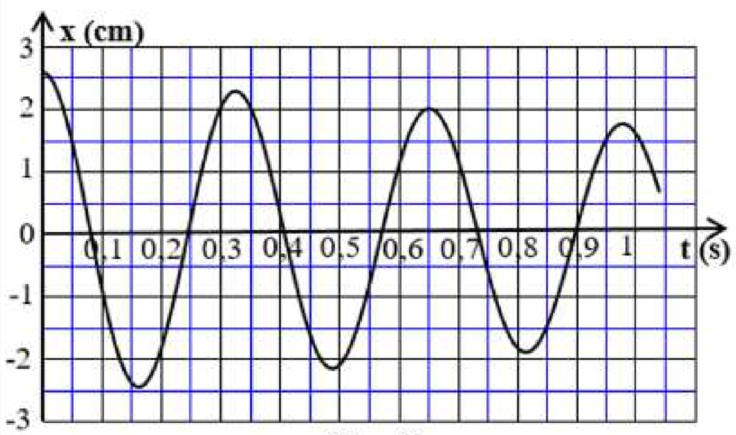
1-3) En déduire l'expression de la période propre T_0 de ces oscillations.

2) Oscillations libres amorties

En réalité, la force de frottement possède une certaine valeur. En tenant compte des conditions initiales précédentes, un dispositif permet d'enregistrer les variations de x en fonction du temps t comme l'indique le document (Doc 2) ci-contre.

2-1) En se référant au graphique, déterminer la pseudo-période T des oscillations.

2-2) Calculer la puissance moyenne dissipée entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 3T$.



(Doc 2)

3) Oscillations forcées

On relie maintenant l'extrémité B du ressort à un vibreur de fréquence réglable f_v et d'amplitude constante. On donne à f_v différentes valeurs et on enregistre, pour chaque valeur de f_v, la valeur correspondante de l'amplitude des oscillations de G comme l'indique le tableau du document (Doc 3) ci-dessous.

(Doc 3)

f_v (Hz)	1,5	2	2,5	2,8	3	3,2	3,3	3,6	4	4,5
x_m (cm)	0,4	0,6	1	1,5	2,1	2,3	2	1,5	1	0,7

3-1) En se référant à ce tableau, déterminer la valeur approximative de la période propre des oscillations de (R).

3-2) Déterminer la valeur approximative de la masse m de (S).

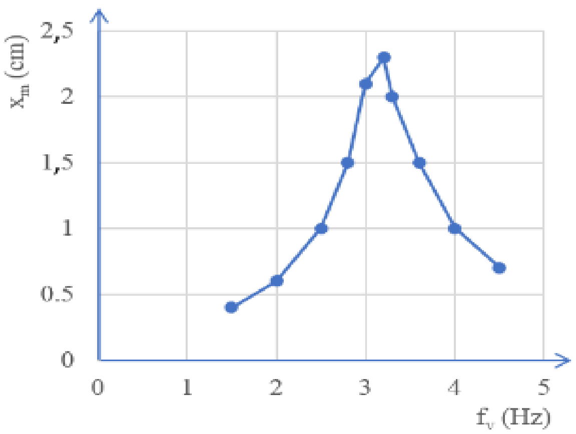
3-3) Tracer le graphique donnant les variations de x_m en fonction de f_v.

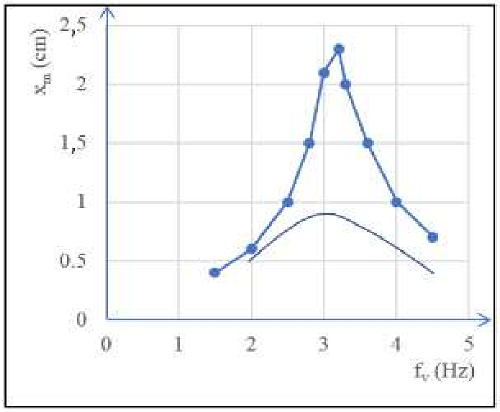
3-4) Tracer, en le justifiant, l'allure de la courbe précédente lorsque la force de frottement est de valeur plus grande.

Corrigé

1-1	$E_m = E_c + E_p$ $E_m = ½\ mv^2 + ½\ kx^2$
1-2	Il n'y a pas de frottement donc l'énergie mécanique est conservée alors $E_m = cte \quad \forall\ t$ $\frac{dE_m}{dt} = mvv' + kxx' = 0 \quad \forall\ t$ $mx'\left(x'' + \frac{k}{m}x\right) = 0 \quad \forall\ t$ Or mx' n'est pas toujours nulle $x'' + \frac{k}{m}x = 0$
1-3	L'équation différentielle est de la forme : $x'' + \omega_0^2 x = 0$ L'oscillateur effectue alors des oscillations harmoniques simples de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ La période propre est : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

2-1	A partir du graphique, 3T = 0,98 alors T = 0,327 s
2-2	A t = 0, x_0 = 2,6 cm, $E_{m0} = ½\ kx_0^2 = 0{,}02704$ J (E_{c0} = 0 car l'élongation est maximale) A t = 3T, x = 1,8 cm, $E_m = ½\ kx^2 = 0{,}01296$ J (E_c = 0 car l'élongation est maximale) $P_{moy\ diss} = \frac{\text{Energie perdue}}{\text{durée}} = \frac{0{,}02704 - 0{,}01296}{0{,}98} = 0{,}0144$ W
3-1	En se référant au graphique, l'amortissement est relativement très faible. Dans ce cas, la fréquence de résonance est très proche de la fréquence propre du pendule. f_0 correspond à la plus grande amplitude, f_0 = 3,2 Hz donc $T_0 = 1/f_0 = 0{,}3125$ s
3-2	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; $m = \frac{T_0^2 \times k}{4\pi^2} = \frac{(0{,}3125)^2 \times 80}{4\pi^2} = 0{,}198$ kg

3-3	

3-4	Lorsque la force de frottement augmente, la valeur maximale de l'amplitude de la courbe de résonance devient plus petite, la bande passante plus large et la fréquence de résonance plus petite. Lorsque la force de frottement devient très grande, le phénomène de résonance disparaît et (S) devient sensible à une large gamme de fréquences (la bande passante devient très large). *Remarque : l'allure de la courbe doit assurer le respect des conditions initiales et la situation du problème.* 

Exercice 3

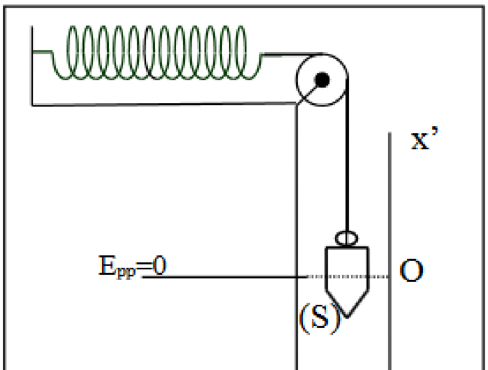
1) Pendule élastique

Un ressort, de raideur k et de masse négligeable, est placé sur une table lisse et horizontale. L'extrémité gauche du ressort est fixée à un support fixe et l'extrémité droite est reliée à l'extrémité d'un fil, de masse négligeable, passant sur une très légère poulie, comme l'indique le document (Doc 4) ci-contre.

Une particule (S), de masse m, est attachée à l'autre extrémité du fil. A l'équilibre, (S) est en O.

Prendre le plan horizontal passant par la position d'équilibre de (S') comme niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur et g = 10 m/s^2.

Négliger toute force de frottement.



(Doc 4)

1-1) Lorsque (S) est en équilibre, elle coïncide avec l'origine O de l'axe vertical x'Ox, et le ressort est allongé de $\Delta\ell$. Montrer que $\Delta\ell = \frac{mg}{k}$.

1-2) La particule, tirée vers le bas de 4 cm, est lâchée sans vitesse à l'instant $t_0 = 0$. À un instant t, l'abscisse de la particule est x et la valeur algébrique de sa vitesse est $v = \frac{dx}{dt} = x'$.

1-2-1) Montrer qu'à l'instant t, l'expression de l'énergie mécanique du système [(S), Terre, ressort, fil, poulie] est donnée par : $E_m = \frac{1}{2}k(\Delta\ell + x)^2 - mgx + \frac{1}{2}mv^2$.

1-2-2) Déterminer l'équation différentielle du second ordre en x qui décrit le mouvement de (S).

1-2-3) En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 du pendule et donner celle de sa période propre T_0 en fonction de $\Delta\ell$ et g.

1-2-4) Déterminer alors l'équation horaire du mouvement de (S) sachant qu'elle est de la forme : $x = x_m\sin(\omega_0 t + \varphi)$.

2) Pendule simple

Un pendule simple est formé d'un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur L, et d'une particule (S') de masse m, comme l'indique le document (Doc 5) ci-contre. Suspendu convenablement, (S') est écarté de sa position d'équilibre d'une élongation angulaire $\theta_0 = 0{,}10$ rd, puis il est lâché sans vitesse à l'instant $t_0 = 0$. Le pendule effectue des oscillations d'amplitude angulaire $\theta_m = 0{,}10$ rd. A un instant t, l'abscisse angulaire du pendule est θ et sa vitesse angulaire est $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$.

Prendre le plan horizontal passant par la position d'équilibre de (S') comme niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur et $g = 10\ m/s^2$. Négliger toute force de frottement.

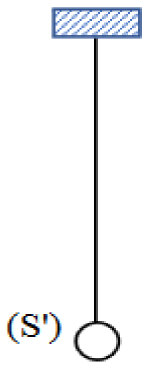
Prendre au besoin, pour les faibles valeurs de θ, (θ en rd) : $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ ou $\sin\theta = \theta$.

2-1) Déterminer, à un instant t, l'expression de l'énergie mécanique du système (pendule, Terre).

2-2) Déterminer l'équation différentielle du second ordre en θ qui décrit le mouvement du pendule.

2-3) En déduire l'expression de la pulsation propre ω'_0 de ce pendule, puis donner celle de sa période propre T'_0 en fonction de L et g.

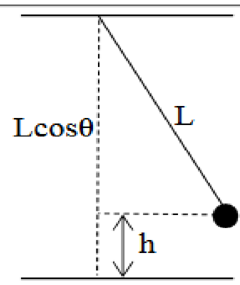
2-4) Déterminer l'équation horaire du mouvement du pendule sachant qu'elle est de la forme : $\theta = \theta_m\sin(\omega'_0 t + \varphi')$.



3) Comparaison

Comparer les périodes propres T_0 et T'_0 de ces pendules et donner la condition à remplir pour qu'un pendule élastique et un pendule simple soient synchrones.

Corrigé

Question	Réponse
1-1	La particule (S) est en équilibre : P = T ; $mg = k\Delta\ell \;\Rightarrow\; \Delta\ell = \frac{mg}{k}$
1-2-1	$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe} = ½\, k(\Delta\ell + x)^2 - mgx + ½\, mv^2$
1-2-2	Il n'y a pas de frottement donc l'énergie mécanique est conservée alors $E_m = ½\, k\Delta\ell^2 + ½\, kx^2 + kx\Delta\ell - mgx + ½\, mv^2 = cte\ \forall t$ (avec $k\Delta\ell = mg$) $\frac{dEm}{dt} = 0 + kxx' + mvv' = 0 \quad \forall t$ Or mx' n'est pas toujours nulle $x'' + \frac{k}{m}x = 0$
1-2-3	L'équation différentielle est de la forme : $x'' + \omega_0^2 x = 0$ L'oscillateur effectue alors des oscillations harmoniques simples de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ La période propre est : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell}{g}}$
1-2-4	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $x = x_m\sin(\omega_0 t + \varphi)$; $v = x_m\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$; à $t_0 = 0$: $x_0 = x_m\sin(\varphi) > 0$ et $v_0 = x_m\omega_0\cos(\varphi) = 0$ donc $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rd $x_0 = x_m = 4$ cm. $x = 4\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2})$; (t en s et x en cm)
2-1	$E_m = E_p + E_c$ $E_m = mgh + ½\, I\theta'^2 = mgL(1-\cos\theta) + ½\, I\theta'^2$ Sachant que $\theta_m = 0,10$ rd $< 6°$, $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ $E_m = ½\, mgL\theta^2 + ½\, mL^2\theta'^2$ 
2-2	$E_m = ½\, mgL\theta^2 + ½\, mL^2\theta'^2 = cte\ \forall t$ $\frac{dEm}{dt} = 0$ alors : $mgL\theta\theta' + mL^2\theta'\theta'' = 0$ $mL\theta'$ n'est pas toujours nulle. $g\theta + L\theta'' = 0 \;\Rightarrow\; \theta'' + (g/L)\,\theta = 0$
2-3	L'équation différentielle est de la forme : $\theta'' + \omega_0'^2\theta = 0$ L'oscillateur effectue alors des oscillations harmoniques simples de pulsation propre ω'_0 avec $\omega_0'^2 = \frac{g}{L}$ donc $\omega'_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ La période propre est : $T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
2-4	$\theta = \theta_m\sin(\omega'_0 t + \varphi')$; $\theta' = \theta'_m\omega'_0\cos(\omega'_0 t + \varphi')$; à $t_0 = 0$, $\theta_0 = \theta_m\sin(\varphi') > 0$ et $\theta'_0 = \theta_m\omega'_0\cos(\varphi') = 0$ donc $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ rd $\theta_0 = \theta_m = 0,1$ rd $\theta = 0,1\sin(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \frac{\pi}{2})$; (t en s et θ en rd)
3	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell}{g}}$ et $T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ Les pendules sont synchrones : $T_0 = T'_0 \;\Rightarrow\; \Delta\ell = L$