

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International et mission française

La dérivation d'une fonction numérique

I- La dérivabilité d'une fonction en un point

1-1/ Le nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que la fonction f est dérivable en a , s'il existe un nombre réel l tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$$

Le réel l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a , il est noté : $f'(a)$

$$\text{On écrit : } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l \text{ ou } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$$

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 + x - 3$$

Justifier que f est dérivable en -2 et préciser $f'(-2)$

Solution :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-3+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} x-1 = -3 = f'(-2) \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = -3$

Remarque

Si f est dérivable en a et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

On pose : $h = x - a$ si x tend vers a alors h tend vers 0 et on obtient

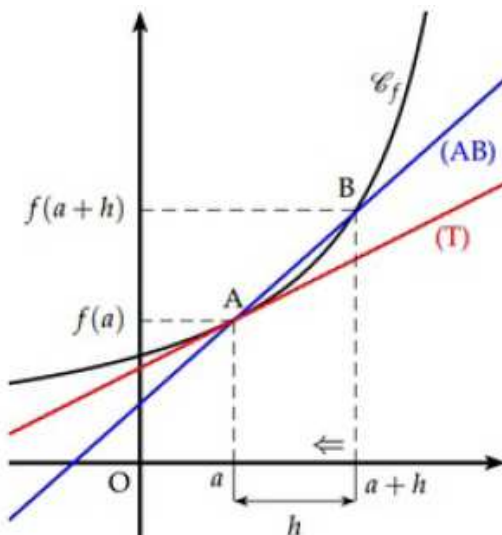
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International et mission française

Application : Calculer le nombre dérivé de $f(x) = x^3 + x$ en $a = 1$ en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

$$\begin{aligned}
 \text{Solution : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 + 1 + h - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h + 1 + 1 + h - 2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 + 3h + 4 = 4 = f'(1)
 \end{aligned}$$

1-2/ Interprétation géométrique du nombre dérivé



Le nombre dérivé en un point x_0 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point x_0

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

La fonction $u : x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ est appelée la fonction affine tangente à la fonction f au point a .

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International et mission française

Exemple :

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe

de la fonction $f(x) = \sin x$ en $A(0, f(0))$

Solution : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f'(0)$

Donc f est dérivable en 0

$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

L'équation de la tangente à la courbe

en $A(0, f(0))$ est : $(T): y = x$

1-3/ Approximation d'une fonction dérivable en un point par une fonction affine

La tangente à la courbe au point x_0 est une approximation affine de la fonction au voisinage de x_0

II- Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche

2-1/ Définitions et propriétés

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme : $[a; a + r[$ ($r > 0$)

On dit que f est dérivable à droite en a s'il existe un réel l tel que : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$

Le réel l est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a , et on le note par : $f'_d(a)$

On écrit : $f'_d(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme : $]a - r; a]$ ($r > 0$)

On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un réel l tel que : $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$

Le réel l est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en a , et on le note par : $f'_g(a)$

On écrit : $f'_g(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International et mission française

Propriété

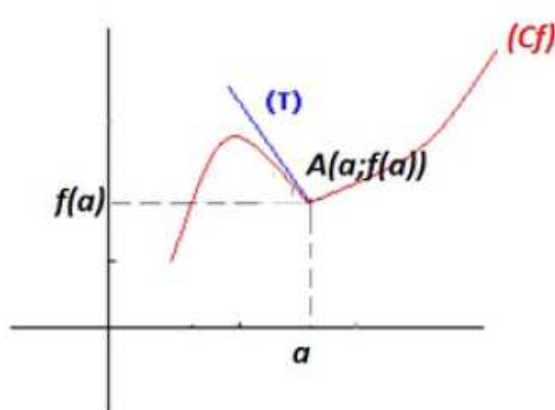
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a et f est dérivable à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

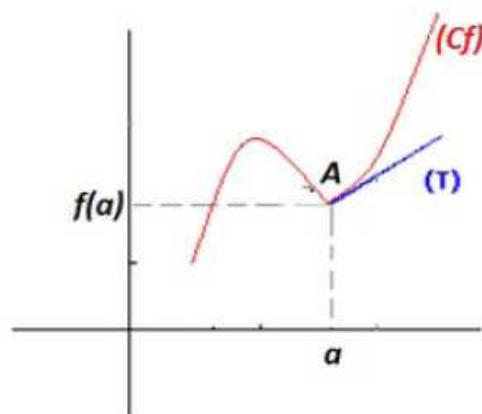
2-2/ Interprétation géométrique - Demi droite tangente en un point

Si f est dérivable à droite en a , cela signifie graphiquement que la courbe de la fonction f admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation : $(T_d) : y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$

Si f est dérivable à gauche en a , cela signifie graphiquement que la courbe de la fonction f admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation : $(T_g) : y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$



$$\begin{cases} (T) : y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$



$$\begin{cases} (T) : y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International et mission française

La limite	La dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	f est dérivable en a et on a : $f'(a) = l$	(C_f) admet une tangente d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ au point $A(a; f(a))$.
$\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$	f n'est pas dérivable en a .	(C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = a$ au point $A(a; f(a))$.
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	f est dérivable à droite en a et on a : $f'_d(a) = l$	(C_f) admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ et $x \geq a$.
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	f est dérivable à gauche en a et on a : $f'_g(a) = l$	(C_f) admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$ et $x \leq a$.

Application 1

soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \dots x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} \dots x < 1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

Solution : on a $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2 - 1^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} = f'_d(1)$$

Donc f est dérivable à droite en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{4}(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{4}(x + 1) = \frac{1}{2} = f'_g(1)$$

Donc f est dérivable à gauche en 1

et on a : $f'_d(1) = f'_g(1)$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$

Application 2

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International et mission française

soit f une fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - |x| \quad \text{étudier la dérivabilité de } f \text{ en } x_0 = 0$$

Solution :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1 = f'_d(0)$$

donc f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 = 1 = f'_g(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

III- La fonction dérivé d'une fonction dérivable

3-1/ La fonction dérivé

Définitions

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert $]a; b[$ si f est dérivable en tout point de $]a; b[$.

On dit qu'une fonction f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a; b]$ si f est dérivable sur $]a; b[$ et f dérivable à droite en a et à gauche en b .

Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I , alors la fonction dérivée de f est la fonction noté f' est définie de I vers $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f' : I &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

3-3/ Fonction dérivée des fonctions usuelles

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International et mission française

La fonction f	L'ensemble de définition de f	La fonction f'	L'ensemble de définition de f'
$f : x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ ou $] -\infty; 0[$
$f : x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto ax + b$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto a$	$\mathbb{R}$

3-4/ Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété

Si f et g sont deux fonction dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$, alors on a :

- 1) La fonction $f + g$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(f + g)' = f' + g'$
- 2) La fonction $k.f$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(k.f)' = k.f'$
- 3) La fonction $f \times g$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$
- 4) Si de plus $(\forall x \in I) g(x) \neq 0$, alors :

- La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$
- La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

Remarque

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International et mission française

Dérivée de la somme	$(u + v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(\lambda u)' = \lambda u'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Application 1

Déterminer la fonction dérivée de $f(x) = (5x^2 + 1)(3x - 1)$

On utilise la formule : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((5x^2 + 1)(3x - 1))' = (5x^2 + 1)' \times (3x - 1) + (5x^2 + 1) \times (3x - 1)'$$

$$f'(x) = 10x \times (3x - 1) + 3(5x^2 + 1) = 30x^2 - 10x + 15x^2 + 3$$

$$f'(x) = 45x^2 - 10x + 3$$

Application 2

Déterminer la fonction dérivée de $f(x) = (3x + 4)^3$

On utilise la formule : $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$

$$f'(x) = ((3x + 4)^3)' = 3 \times (3x + 4)^{3-1} \times (3x + 4)' = 3 \times 3 \times (3x + 4)^{3-1} = 9(3x + 4)^2$$

Application 3

Déterminer la fonction dérivée de $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International et mission française

On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2}$$

Application 4

Déterminer la fonction dérivée de $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x}$

On utilise la formule : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 8x})' = \frac{(x^2 + 8x)'}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{2x + 8}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x}}$$

Application 5

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée.

Solution : $D_f =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

On a : $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 - x$

Et on a : $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Donc f est dérivable sur $D_f - \{0; 1\}$

$$\forall x \in D_f - \{0; 1\} : f'(x) = (\sqrt{x^2 - x})' = \frac{(x^2 - x)'}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

IV- Applications de la dérivation

4-1/ Monotonie d'une fonction et signe de sa fonction dérivée

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Dérivation (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} et 2 ^{ème} Bac International et mission française

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f est croissante sur l'intervalle I , alors : $(\forall x \in I) f'(x) \geq 0$
- Si f est décroissante sur l'intervalle I , alors : $(\forall x \in I) f'(x) \leq 0$
- Si f est constante sur l'intervalle I , alors : $(\forall x \in I) f'(x) = 0$

(on utilisant le terme strictement on modifiera le symbole "supérieur ou égale / inférieur ou égale " par le symbole $<$ ou $>$)

4-2/ Extremums d'une fonction dérivable

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Si f admet un extremum local au point a , alors $f'(a) = 0$.

V- Équations différentielle $y'' + w^2 y = 0$

Définition

Soit w un nombre réel non nul.

L'équation $y'' + w^2 y = 0$ où l'inconnue est une fonction y telle que y'' est sa dérivée seconde est appelée équation différentielle.

Toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'égalité $f''(x) + w^2 f(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ est appelée solution de l'équation différentielle $y'' + w^2 y = 0$.

Propriété

Soit w un nombre réel non nul.

La solution générale de l'équation différentielle $y'' + w^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto y(x) = \alpha \cos(wx) + \beta \sin(wx)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$