

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

Généralités sur les fonctions

1) Définitions d'une fonction Domaine de définitions

Activité

- Qui peut nous rappeler tout ce que vous avez vu sur les fonctions
 - Domaine de définition
 - Taux d'accroissement et monotonie
 - Parité
 - La fonction inverse
 - La fonction homographique
 - La fonction polynôme
- Donnez les domaines de définition des fonctions suivantes

$$1) f(x) = 3x^2 - x + 1. \quad 2) f(x) = \frac{x^3}{2x - 4}.$$

$$3) f(x) = \frac{2x^4}{x^2 - 4}. \quad 4) f(x) = \frac{7x - 1}{x^3 - 2x}.$$

$$5) f(x) = \sqrt{-3x + 6}. \quad 6) f(x) = \frac{x - 5}{2x^2 - 5x - 3}.$$

$$7) f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}. \quad 8) f(x) = \sqrt{\frac{-3x + 9}{x + 1}}.$$

$$9) f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{-2x^2 + x + 3}}. \quad 10) f(x) = \frac{|x - 5|}{x^2 + 1}.$$

Définition

Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f , que l'on notera D_f

2) Fonctions paires et Fonctions impaires

2.1 Définitions

a. Ensemble de définition centré

On dit que D_f est un ensemble de définition centré si et seulement si :

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

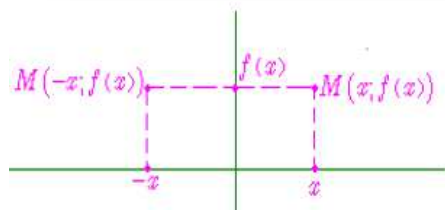
Pour tout réel x , si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$

Exemples d'ensembles centrés	Exemples d'ensembles non centrés
$]-\infty, +\infty[$	$]0, +\infty[$
$^{\circ} * \text{ (ou } ^{\circ} - \{0\})$	$^{\circ} - \{1\}$
$^{\circ} - \{-1; 1\}$	$^{\circ} - \{-1; 2\}$
$[-4; 4]$	$[-4; 3]$

2.2. Fonction paire

On dit qu'une fonction f est paire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré
2. Pour tout réel x de D_f on a : $f(-x) = f(x)$



Exemples

$$x \mapsto |x| \quad x \mapsto \cos(x) \quad f(x) = kx^n \text{ (avec } n \text{ paire)}$$

Remarques importantes

- l'opposée d'une fonction paire est une fonction paire,
- l'inverse d'une fonction paire est une fonction paire,
- la somme de deux fonctions paires est une fonction paire,
- le produit de 2 fonctions paires ou de 2 fonctions impaires est une fonction paire.

2.3. Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

2. Pour tout réel x de D_f , on a : $f(-x) = -f(x)$

Exemples

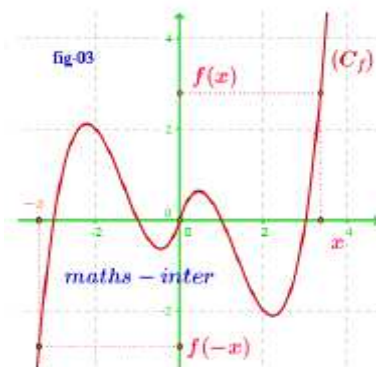
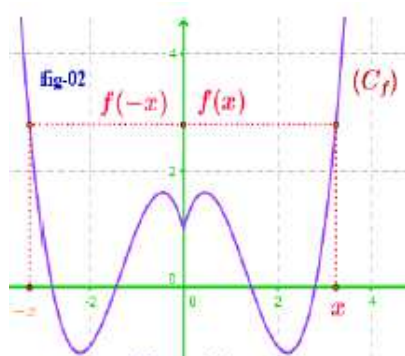
$$x \mapsto \sin(x) \quad x \mapsto kx^n \text{ (avec } n \text{ impaire)}$$

Remarques importantes

- l'opposée d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- l'inverse d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire,

2.4 le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine



Application

Etudier la parité et le domaine de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = 3x^2 - 5 \quad h(x) = 2x^3 + x^2$$

$$g(x) = \frac{3}{x} \quad t(x) = \frac{x}{x-2}$$

3) Les variations d'une fonction

Activité

- A votre avis qu'elle est l'utilité d'étudier les fonctions ?

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

Modéliser $\Rightarrow$ Prévoir $\Rightarrow$ Maîtriser $\Rightarrow$ Optimiser

Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et soit I un intervalle inclus dans D_f

1. f est croissante sur I signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$

f est strictement croissante sur I signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$

2. f est décroissante sur I signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$

f est strictement décroissante sur I signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$

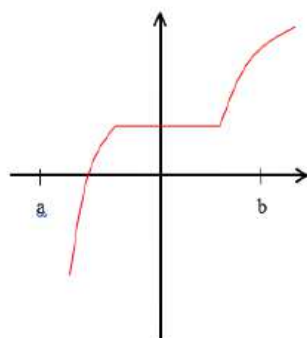
3. f est constante sur I signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$

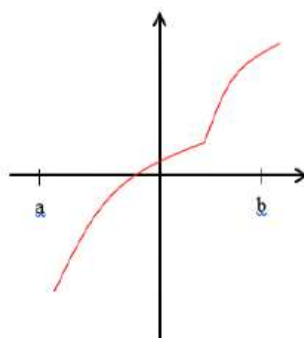
4. f est dite monotone sur I signifie que :

elle est soit croissante ou décroissante sur I

Autrement dit $\Rightarrow$ une fonction croissante conserve les l'ordre



Fonction croissante sur $[a, b]$, mais non strictement croissante



Fonction strictement croissante sur $[a, b]$

Application:

Etudiez la monotonie des fonctions suivantes en utilisant la définition

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

$$f(x) = 7x - 5$$

$$g(x) = \frac{2}{x}$$

Indication => Prendre $x_1 > x_2$ et comparer les images

Le tableau de variation

Le tableau de variation résume le comportement de la fonction sur tout son domaine de définition

Exemple pour la fonction $f(x) = 2/x$

(les doubles barres signifient que la fonction n'est pas définie sur cette valeur)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

Le taux d'accroissement

Il indique la monotonie apparente de la fonction entre deux abscisses

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Autrement dit => on considère que la fonction est une droite entre x_1 et x_2 et on calcule son coefficient directeur

Si pour tous x_1 et x_2 d'un intervalle I de D_f

- $T(x_1, x_2) > 0$ alors on dit que f est strictement croissante sur I
- $T(x_1, x_2) < 0$ alors on dit que f est strictement décroissante sur I
- $T(x_1, x_2) = 0$ alors on dit que f est constante sur I

Application

$$f(x) = 3x^2 + 2$$

1- Domaine de définition, Parité, Monotonie, Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

Important

Si une fonction est paire ou impaire il suffit d'étudier sa monotonie sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ L'autre partie est déduite par symétrie sur le tableau de variation

Application

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

- 1- Domaine de définition
- 2- Parité
- 3- Monotonie
- 4- Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Variations de $f(x)$	$\nearrow$ -2 $\searrow$			$\searrow$ 2 $\nearrow$	

Indication => après factorisation de $f(x_1) - f(x_2)$ faire une disjonction des cas $]0,1[$ et $]1,+\infty[$

Les variations des fonctions $f+\alpha$ et αf

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}^*$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ alors les fonctions f et αf ont les mêmes variations sur I
- Si $\alpha \in \mathbb{R}^{*-}$ alors les fonctions f et αf ont des variations opposées sur I
- f et $\alpha + f$ ont les mêmes variations sur I

4) comparaison de deux fonctions

- On dit que deux fonction f et g sont égales si et seulement si

$$D_f = D_g \text{ et Pour tout } x \in D_f : f(x) = g(x)$$

Application (comparez)

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

Réponse :

$$D_f =]-\infty; -3[\cup [1; +\infty[\quad D_g = [1; +\infty[$$

Donc pas égales

Définitions

Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies Sur I .

1) f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x) \leq g(x)$

pour tout $x \in I$. On note : $f \leq g$ Sur I .

2) f est positive sur I lorsque : $f(x) \geq 0$ pour tout

$x \in I$. On note : $f \geq 0$ sur I .

3) f est **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M

tel que : $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$

4) f est **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m

tel que : $m \leq f(x)$ pour tout $x \in I$

5) f est **bornée** sur I lorsqu'il existe des réels

M et m tels que : $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in I$.

(f est majorée et minorée)

Interprétation graphique :

1) $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ ssi La courbe

(C_g) de la fonction g est au-dessus de La

courbe (C_f) de f sur l'intervalle I

2) $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ ssi La courbe (C_f)

de la fonction f est au-dessus de l'axe des

abscisse sur l'intervalle I

Application (comparez)

$$f(x) = x + 1 \text{ et } g(x) = x^2 + x + 2$$

Solution : $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) - f(x) = x^2 + x + 2 - (x + 1) = x^2 + 1 > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Donc : $f(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc $f < g$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

Application (étudiez le signe de cette fonction)

$$f(x) = \frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$$

Solution:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{ssi} \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right] \quad \text{donc} \quad f \geq 0$$

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right]$$

$$f(x) \leq 0 \quad \text{ssi} \quad x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right[\cup [2; +\infty[$$

Application (montrez que cette fonction est majorée)

$$f(x) = -x^2 + x$$

Solution : On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x) = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$\text{On a : } -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \quad \text{donc} \quad -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{donc : } f(x) \leq \frac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = \frac{1}{4}$

Application (quelles sont les valeurs de m pour que $D_f = \mathbb{R}$)

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+m} \quad \text{avec} \quad m \in \mathbb{R}$$

Solution :

$$1) D_f = \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + m \neq 0$$

$$x^2 + x + m \neq 0 \quad \text{ssi} \quad \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4m < 0$$

$$\text{Ssi} \quad m > \frac{1}{4}$$

5) Les extremums d'une fonction

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

➤ Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) ssi pour tout $x \in I: f(x) \leq f(a)$

➤ Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) ssi pour tout $x \in I: f(x) \geq f(a)$

Application

Trouvez un minimum pour la fonction

$$f(x) = 5x^2 + 3$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

Solution

On a pour tout $x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$ Donc $5x^2 \geq 0$
car $5 > 0$

Par suite $5x^2 + 3 \geq 3$ et on a $f(0) = 3$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(0)$

d'où $f(0) = 3$ est un minimum absolue de f sur $\mathbb{R}$

Application

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$$

1) Déterminer D_f

2) a) Démontrer que f est majorée par 3.

b) est ce que 3 est une valeur maximale de f ?

3) a) Démontrer que f est minorée par 2.

b) est ce que 2 est une valeur minimale de f ?

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

Solution :

$$1) D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$$

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ pas de solution dans } \mathbb{R} \text{ donc}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$2) \text{ a) soit } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) - 3 = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 3 = \frac{2x^2 + 3 - 3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 3 - 3x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

$$\text{Donc } f(x) - 3 = \frac{-x^2}{x^2 + 1} \leq 0 \text{ par suite } f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = 3$

$$\text{b) on remarque que : } f(0) = 3$$

$$\text{donc } f(x) \leq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc 3 est une valeur maximale de f

$$2) \text{ a) soit } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 2 = \frac{2x^2 + 3 - 2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

$$\text{Donc } f(x) - 2 = \frac{1}{x^2 + 1} > 0 \text{ par suite :}$$

$$0 < f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m = 2$

$$\text{b) on remarque que : } f(x) > 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2 n'est pas donc une valeur minimale de f

$$\text{conclusion : } 2 < f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

6) études et représentations graphiques des fonctions

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ et } a \neq 0$$

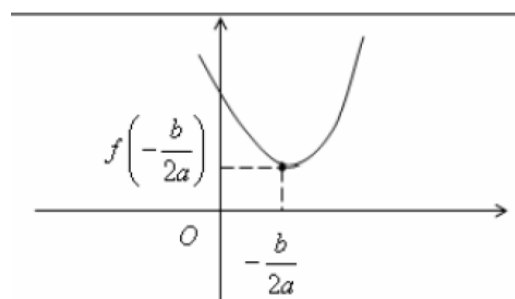
1) **La courbe représentative** est une parabole de sommet $W(\alpha, \beta)$

$$\text{et d'axe de symétrie la droite } x = \alpha \quad \alpha = \frac{-b}{2a}$$

2) **Les variations de f**

Si $a > 0$

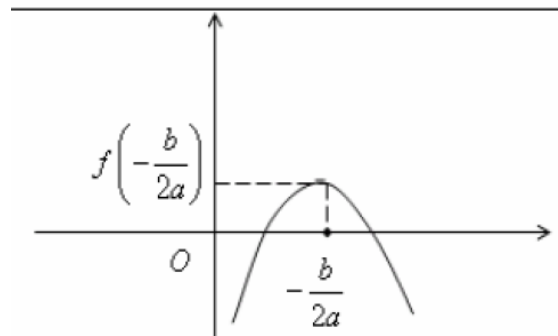
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\swarrow \quad \searrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$		



Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

Si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow f\left(-\frac{b}{2a}\right) \searrow$		



Application (étudiez les fonctions suivantes)

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 2 \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$

Réponse

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow -4 \nearrow$		

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow 3 \searrow$		

7) études et représentations graphiques des fonctions homographiques

$$x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d} \quad a \neq 0 \text{ et } c \neq 0$$

1) La courbe représentative est une hyperbole de centre

$$W\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$$

et d'asymptotes les droites

$$x = -\frac{d}{c} \text{ et } y = \frac{a}{c}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

$$\text{si } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

$$\text{si } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

Application

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

Réponse

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

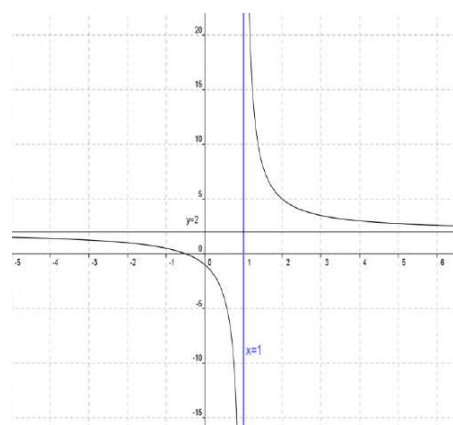
Donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 < 0$

• Donc le tableau de variations de

$$x \longrightarrow \frac{2x+1}{x-1}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3



(C_f) est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=2$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

Application

$$g(x) = \frac{-x}{x-2}$$

Réponse

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

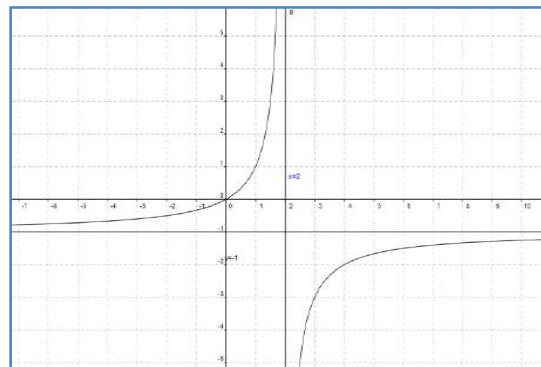
$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

• Donc le tableau de variations

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

• Représentation graphique

-1	0	1	2	3	4	5
-1/3	0	1		-3	-2	-5/3



(C_f) est l'hyperbole de centre $W(2; -1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=2$ et $y=-1$

8) études et représentations de la fonction x^3

1- $D_f = \mathbb{R}$

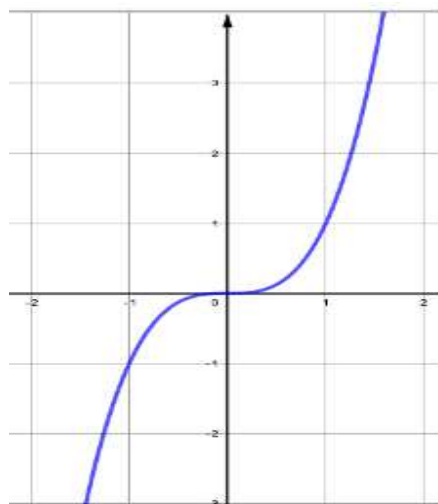
2- c'est une fonction impaire donc on va étudier la fonction sur

$[0, +\infty[$ $a > b \Rightarrow a^3 > b^3$ donc f croissante sur $[0, +\infty[$

Par symétrie centrale on détermine la deuxième partie du tableau de variation et de la courbe

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^3$	$-\infty$		$+\infty$

9) études et représentations de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$

$$D_f = \mathbb{R}^+$$

Soient u et v deux réels positifs ou nuls

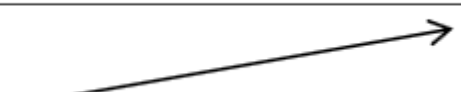
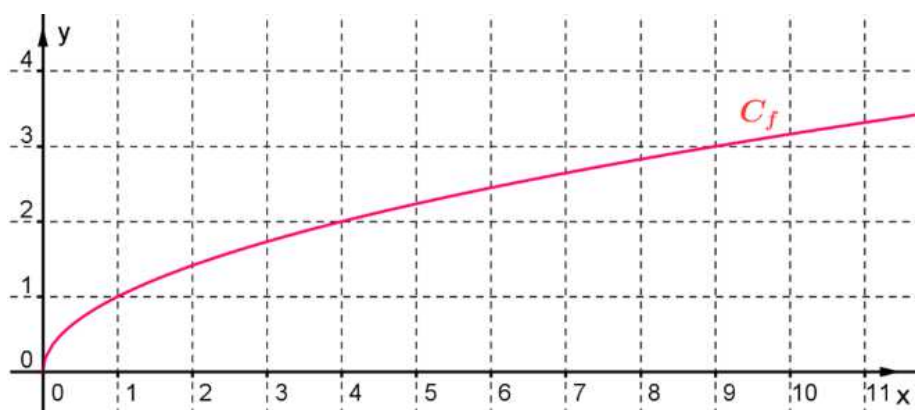
Comparons $f(u)$ et $f(v)$

On sait que $(\sqrt{u} - \sqrt{v})(\sqrt{u} + \sqrt{v}) = \sqrt{u}^2 - \sqrt{v}^2 = u - v$ d'après la définition de f

$$\text{Donc } f(u) - f(v) = \frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}}$$

d'où $f(u) - f(v)$ possède le même signe que $u - v$ (car $\sqrt{u} + \sqrt{v} \geq 0$ par définition)

x	0	$+\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	0	$+\infty$

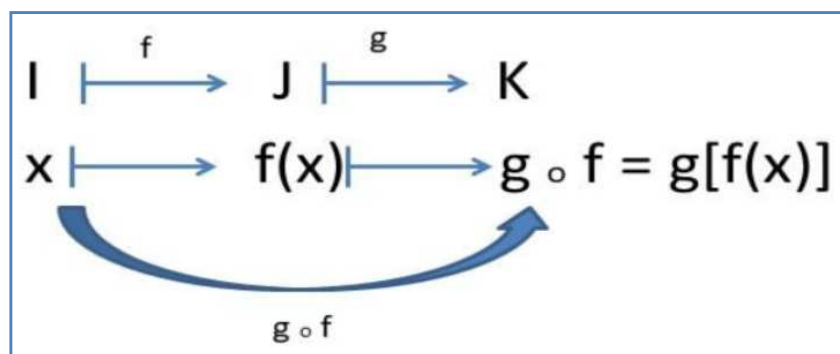
Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

10) La composée de deux fonctions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J .

Soit g une fonction définie sur J et prenant ses valeurs dans un intervalle K . On peut alors construire la fonction qui à tout nombre réel x de I associe $g[f(x)]$. Cette fonction est appelée la fonction composée de f par g et elle se note

$$g \circ f$$



Application

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x + 1$$

Déterminer : $g \circ f$ et $f \circ g$

Solution : on a : $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$ donc

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x + 3) = 2(x^2 - 2x + 3) + 1$$

$$(g \circ f)(x) = 2x^2 - 4x + 7$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2(2x + 1) + 3$$

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 4x - 2 + 3 = 4x^2 + 2$$

Application

$$f(x) = 3x + 4 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

1) Déterminer $D_{g \circ f}$

2) déterminer : $(g \circ f)(x)$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

Indication => le domaine de "g" n'inclut pas $x=-1$ donc on doit enlever les valeurs de x qui donne $y=-1$ pour la fonction "f"

Solution : 1) $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$

On a $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ donc

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) \neq -1\}$$

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow 3x + 4 = -1 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} = x$$

$$\text{donc : } D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

$$2) \text{ on a : } D_f = \mathbb{R} \text{ et } D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 4) = \frac{1}{3x + 4 + 1}$$

$$\text{et } D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{3x + 5}$$

Application

Exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires :

$$1) h_1(x) = \frac{1}{3x-1} \quad 2) h_2(x) = \sqrt{x+3}$$

Solution : 1) $h_1(x) = \frac{1}{3x-1}$ on a : $h_1(x) = (g \circ f)(x)$

avec $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

$$2) h_2(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{on a : } h_2(x) = (g \circ f)(x)$$

$$\text{avec } f(x) = x + 3 \text{ et } g(x) = \sqrt{x}$$

Variations d'une fonction composée

Théorème :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur $f(I)$.

$\Leftrightarrow$ Si f et g ont même variation respectivement

sur I et $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ Est croissante sur I .

$\Leftrightarrow$ Si f et g ont des variations opposées respectivement sur I et $f(I)$ alors $g \circ f$ est décroissante sur I .

Démonstration

a. f et g sont croissantes :

Comme f est strictement croissante sur I , si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$ (on conserve l'ordre I)

Or g est strictement croissante sur J d'où $f(a) < f(b) \Rightarrow g[f(a)] < g[f(b)]$ (on conserve l'ordre I)

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

b. f et g sont décroissantes :

Comme f est strictement décroissante sur I , si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$ (on change l'ordre !)

Or g est strictement décroissante sur J d'où $f(a) > f(b) \Rightarrow g[f(a)] < g[f(b)]$ (on change l'ordre !)

a. f est croissante et g décroissante :

Comme f est strictement croissante sur I , si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$ (on conserve l'ordre !)

Or g est strictement décroissante sur J d'où $f(a) < f(b) \Rightarrow g[f(a)] > g[f(b)]$ (on change l'ordre !)

Application décomposer une fonction en fonctions élémentaires et en déduire sa monotonie

$$f(x) = -5x^2 + 7 \quad \text{sur } [0; +\infty[$$

Réponse

On va décomposer une fonction en fonctions élémentaire :

$$v(x) = -5x + 7 \quad \text{et} \quad u(x) = x^2$$

La fonction $f = v \circ u$

La fonction u est croissante sur $[0; +\infty[$ et

$$u(x) = x^2 \in [0; +\infty[\quad \text{et}$$

v est décroissante sur

$[0; +\infty[$ Donc d'après le théorème des fonctions composées, $f = v \circ u$ est décroissante sur $[0; +\infty[$

Application2

$$h(x) = \sqrt{1-x} \quad \text{sur }]-\infty; 1]$$

Solution : 1) La fonction h se décompose de cette façon $h = g \circ f$

$$\text{on a alors : } f(x) = 1-x \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

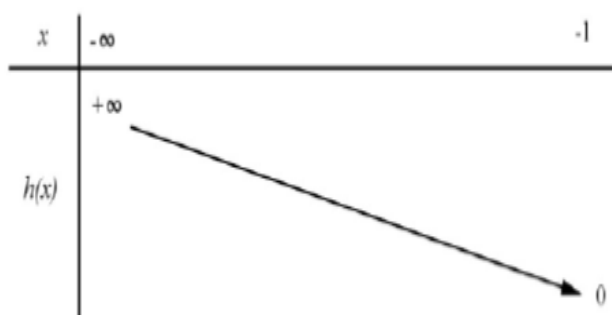
2) On sait que :

$\Rightarrow f$ est décroissante sur $] -\infty; 1]$

$\Rightarrow g$ est croissante sur $f(]-\infty; 1]) = [0; +\infty[$

Donc La fonction h décroissante sur $] -\infty; 1]$

On a alors le tableau de variation suivant



Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

11) fonctions périodiques

On dit que f est périodique de période T si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- a) $\forall x \in D$ on a $x+T \in D$
- b) $\forall x \in D$ on a $f(x+T) = f(x)$

Exemples

- Toute fonction constante est périodique et tout réel non nul en est une période.
- La fonction partie entière $x \longrightarrow E(x)$ est périodique de période 1
- La fonction $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont de période 2π

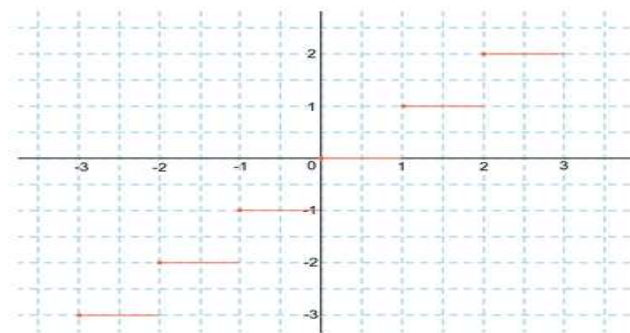
Application

Montrer que la fonction

$f : x \rightarrow x - E(x)$ est périodique de période 1.

Rappel sur la fonction partie entière

$$\begin{cases} [x] \in \mathbb{Z} \\ [x] \leq x < [x] + 1 \end{cases}$$



Solution : $D_f = \mathbb{R}$

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x+1 \in \mathbb{R}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x+1) = x+1 - E(x+1) = x+1 - E(x) - 1 = f(x)$$

L'application f est donc périodique de période 1.

Application

Quelle est la période des fonctions suivantes :

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

$$1) f : x \rightarrow \sin(4x - 1) \quad 2) g : x \rightarrow \cos(5x)$$

$$\text{Solution : } 1) T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad 2) T = \frac{2\pi}{5}$$

La périodicité permet de réduire l'étude des variations d'une fonction à un intervalle de longueur égale à la période

12) positions relatives des courbes

A retenir

- les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessous de (C_g) .

Un cas particulier

$$f(x) = m \quad f(x) \geq m$$

- Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = m$
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y = m$.

Application Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x - 4$ et $g(x) = 3x + 12$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Généralités sur les fonctions (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac FR et BIOF

- 1) Tracer Les courbes (C_f) et (C_g)
- 2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$
- 3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$

Réponses : 1) Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous

2) a) résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -2$ et $x = 8$ donc $S = \{-2; 8\}$

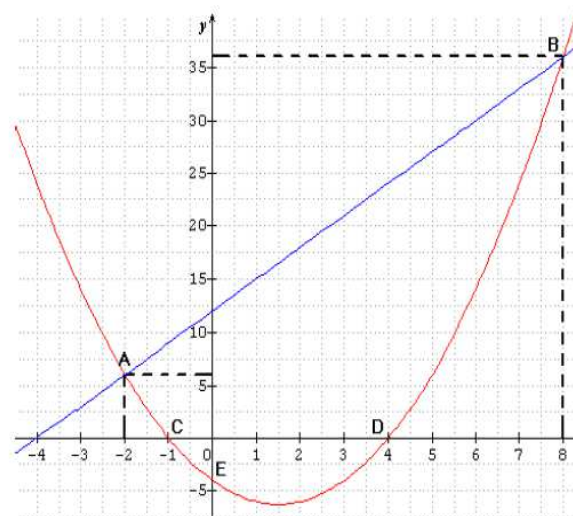
b) résolution algébrique de l'équation

$$f(x) = g(x)$$

$$f(x) = g(x) \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 = 3x + 12 \text{ ssi}$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$a = 1 \text{ et } b = -6 \text{ et } c = -16$$



$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 36 + 64 = 100 = (10)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 + 10}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 - 10}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\text{donc } S = \{-2; 8\}$$

Les racines sont : $x_1 = 8$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$	-2	8	$+\infty$	
$x^2-6x-16$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Donc } S =]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$$

3) a) résolution graphique de l'inéquation $f(x) > g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

$$\text{Donc } S =]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$$

b) résolution algébrique de l'inéquation

$$f(x) > g(x)$$

$$f(x) > g(x) \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 > 3x + 12 \text{ ssi}$$

$$x^2 - 6x - 16 > 0$$