Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul trigonométrique (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1ère et 2ème Bac International SM

Calcul trigonométrique

I- Formules de transformations de $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$ et $\tan(a \pm b)$

1-1/ Transformations de $\sin(a \pm b)$ et $\cos(a \pm b)$

$$\cos(x - y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$$
$$\sin(x + y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$$
$$\sin(x - y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$$

Application

1)Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

2)Calculer $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

3) monter que : $\cos x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

Solution :

1) $\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin\dfrac{5\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3)($\cos(x+\dfrac{\pi}{3}) + \cos(x-\dfrac{\pi}{3}) = \cos x$ ؟؟

$\cos(x+\dfrac{\pi}{3}) + \cos(x-\dfrac{\pi}{3}) = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos x - \sin\dfrac{\pi}{3}\sin x + \cos\dfrac{\pi}{3}\cos x + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin x$

$= \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 2\times\dfrac{1}{2}\cos x = \cos x$

4) $\sin(x+\dfrac{2\pi}{3}) = \sin x\cos\dfrac{2\pi}{3} + \sin\dfrac{2\pi}{3}\cos x = \sin x\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)\cos x$

$\sin(x+\dfrac{2\pi}{3}) = -\sin x\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3}\cos x$

$\sin(x-\dfrac{2\pi}{3}) = \sin x\cos\dfrac{2\pi}{3} - \sin\dfrac{2\pi}{3}\cos x = \sin x\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)\cos x$

$\sin(x-\dfrac{2\pi}{3}) = -\sin x\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin\dfrac{\pi}{3}\cos x$

$\sin(x+\dfrac{2\pi}{3}) + \sin(x-\dfrac{2\pi}{3}) + \sin x = -2\sin x\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul trigonométrique (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / $1^{\text{ère}}$ et $2^{\text{ème}}$ Bac International SM

Conséquences

Si $a = b$ on obtient : $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

D'après $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ et $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$

1-2/ Transformations de $\tan(a \pm b)$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

II- Formules de transformations des sommes à des produit et les produits à des sommes

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos a - \cos b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a - \sin b = -2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \times \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul trigonométrique (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / $1^{\text{ère}}$ et $2^{\text{ème}}$ Bac International SM

III- Autres formules de transformations

3-1/ Transformation de $a\cos x + b\sin x$

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$.

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2} \times \sin(x+\alpha)$$

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2} \times \cos(x-\alpha)$$

$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3-2/ Transformations de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$

On pose $t = \tan\frac{x}{2}$ avec $x \neq \pi + 2k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a :

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{2t}{1-t^2}}$$

IV- Équations trigonométriques

4-1/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$

Si $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $S = \emptyset$ (pas de solution)

Si $a \in [-1, 1]$,

$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} ; \ k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{S = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.}$$

4-2/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$

Si $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $S = \emptyset$ (pas de solution)

Si $a \in [-1, 1]$

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} ;\ k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{S = \{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.}$$

4-3/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} / \tan x = a$

a est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} / \tan x = a$.

$$\boxed{\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{S = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.}$$

4-4/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / a \cos x +$ bsin(x) $= c$

Étape 1

On écrit l'équation sous la forme suivante :

$$\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x\right] = c$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\left[\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x\right] = c$$

ou

$$\sqrt{a^2+b^2}\left[\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x\right] = c$$

$$\cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ou

$$\sin(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Étape 2

$$\boxed{\begin{array}{c} \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ ou \\ \sin(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}}$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Calcul trigonométrique (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	Bac français / 1ère et 2ème Bac International SM

Étape 3

Ensemble de solution de l'équation est lié à la valeur de $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \notin [-1,1]$, l'équation n'a pas de solution : $S=\emptyset$

Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$, on cherche β tel que $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (ou $\sin\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

D'où :

$(E) \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \cos\beta$

ou

$(E) \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \sin\beta$

Exercices

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations

$$\cos 2x = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

2) Résoudre dans $[0\,;\pi]$ l'équations suivantes :

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'équations suivantes : $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$

Solution : 1) on a $\cos 2x = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ ssi

$2x = x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x = -\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi$

Ssi $2x-x = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x+x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ Ssi

$x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) on a $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ ssi

$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}-x+2k\pi$ ou $2x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+x+2k\pi$

ssi $3x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Donc $x=\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$ ou $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$:

$0\le\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\le\frac{7}{36}+\frac{2k}{3}\le1$ Donc $-\frac{7}{24}\le k\le\frac{29}{36}$ Donc

$-0,29\le k\le1,2$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1=\frac{7\pi}{36}$

Pour $k=1$ on trouve $x_2=\frac{7\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}=\frac{31\pi}{36}$

- Encadrement de $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$

$0\le\frac{13\pi}{12}+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\le\frac{13}{12}+2k\le1$ Donc $-\frac{13}{24}\le k\le-\frac{1}{24}$ Donc

$-0,54\le k\le0,04$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc k n'existe pas

- Donc $S_{[0,\pi]}=\left\{\frac{7\pi}{36};\frac{31\pi}{36}\right\}$

3) on a $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$ est définie ssi

$2x-\frac{\pi}{5}\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$ ssi $2x\ne\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+k\pi$

ssi $2x\ne\frac{7\pi}{10}+k\pi$ ssi $x\ne\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}$ Donc

$D=\mathbb{R}-\left\{\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ Donc

$\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ssi $2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+k\pi$ ssi

$2x=\frac{9\pi}{20}+k\pi$ ssi $x=\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

Encadrement de $\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\le\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$ donc

$-\frac{1}{2}\le\frac{9}{40}+\frac{k}{2}\le\frac{1}{2}$ donc $-\frac{29}{40}\le\frac{k}{2}\le\frac{11}{40}$

donc $-\frac{29}{40}\le\frac{k}{2}\le\frac{11}{40}$ donc $-\frac{29}{20}\le k\le\frac{11}{20}$ Donc

$-1,45\le k\le0,55$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=-1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1=\frac{9\pi}{40}$

Pour $k=-1$ on trouve $x_2=\frac{9\pi}{40}-\frac{\pi}{2}=-\frac{11\pi}{40}$

Donc $S=\left\{-\frac{11\pi}{40};\frac{9\pi}{40}\right\}$