Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie analytique de l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	$1^{ère}$ et $2^{ème}$ Bac International et mission française

Géométrie analytique dans l'espace

I) Repérage dans l'Espace

1) Définition – Coordonnées

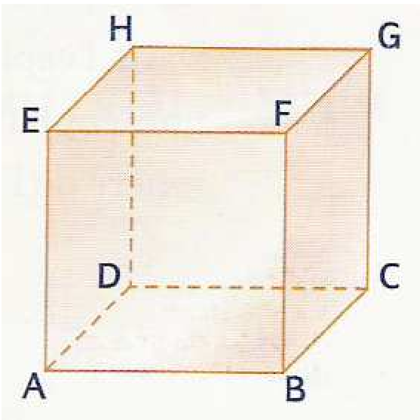
Définition : On appelle **repère de l'Espace** tout quadruplet $\left(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath} ; \vec{k}\right)$ où O est un point de l'Espace et où $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires.

Si les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux, le repère est dit **orthogonal**.

Si, de plus, les vecteurs sont unitaires ($\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$), on dit que le repère est **orthonormal**.

Exemples

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1(voir figure 3), le quadruplet $\left(D ; \overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DH}\right)$ forme un repère orthonormé.

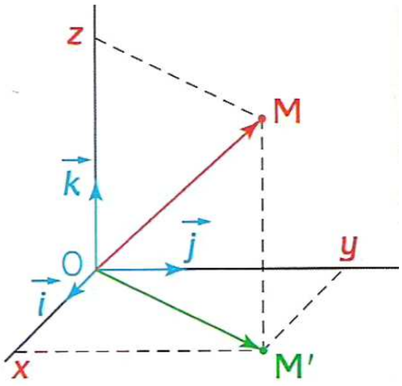


Théorème : (admis)

Soit $\left(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath} ; \vec{k}\right)$ un repère de l'Espace.

1. Soit M un point de l'Espace.
   Il existe un unique triplet $(x ; y ; z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ (voir figure 5).
   Ce triplet est appelé **coordonnées** de M. On note $M\ (x ; y ; z)$.
2. Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'Espace.
   Il existe un unique triplet $(a ; b ; c)$ tel que $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$.
   Ce triplet est appelé **coordonnées** de $\vec{u}$. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie analytique de l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1ère et 2ème Bac International et mission française



Remarque : x est appelé abscisse, y est appelé ordonnée et z est appelé cote.

2) Calcul sur les coordonnées

- Si $A\ (x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et si $B\ (x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ alors :
  - les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
  - les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont : $I\ \left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\,\frac{y_A+y_B}{2}\,;\,\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et si $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ alors :
  - les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont : $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}$
  - Si k est un réel, les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ sont : $k\vec{u}\begin{pmatrix} k\times a \\ k\times b \\ k\times c \end{pmatrix}$

3) Colinéarité, coplanarité

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires) sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Remarque : Dans l'Espace, il n'existe pas de propriété simple équivalente à celle des « produits en croix » de coordonnées pour des vecteurs colinéaires du plan.

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie analytique de l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1[ère] et 2[ème] Bac International et mission française

Definition :

on appelle **déterminant des vecteurs** $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le déterminant

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

Proprieté

- $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ssi $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$
- A, B, C, D coplanaires ssi $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc ssi $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = 0$.

Proprieté

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *un repère de l'espace*

Deus vecteurs $\vec{u}(x_u, y_u, z_u)$ *et* $\vec{v}(x_v, y_v, z_v)$ *sont colinéaire si et seulement si*

$$d_y = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = x_u z_v - z_u x_v = 0 \quad et \quad d_y = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = x_u z_v - z_u x_v = 0 \quad et \quad d_z = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v = 0$$

Application

$B(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base et Soient $\vec{u}(2;-4;3)$ et $\vec{v}(-1;1;2)$ et $\vec{w}(3;1;-1)$

trois vecteurs

Est-ce que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ?

Solution :

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 2(-1-2) + 4(1-6) + 3(-1-3) = -38 \neq 0$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie analytique de l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	$1^{ère}$ et $2^{ème}$ Bac International et mission française

Application

$\vec{u}(2m+1;3;2-m)$ et $\vec{v}(-1;2;3)$ et $\vec{w}(-3;1;2)$

déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

Solution :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2m+1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2-m & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2m+1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (2-m)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ssi $1(2m+1)-21+5(2-m)=0 \Leftrightarrow -3m=10 \Leftrightarrow m=-\frac{10}{3}$

Exercice résolu : Dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ de l'Espace, on considère les points :

$A\ (4;0;0)$ $\quad B\ (0;3;0)$ $\quad C\ (0;0;6)$ $\quad$ et $\quad M\ (1;\frac{3}{2};\frac{3}{2})$

On note I le milieu de $[AC]$ et L le point tel que $3\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer les coordonnées de I et de L.
2. Montrer que les points A, M et L sont alignés.
3. Montrer que les points A, B, C et M sont coplanaires.

Solution :

1. I est le milieu de $[AC]$ donc : $I\ (\frac{4+0}{2};\frac{0+0}{2};\frac{0+6}{2})$ soit $\mathbf{I\ (2;0;3)}$.
   On note $L\ (x_L;y_L;z_L)$.
   On a : $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix} x_L-0 \\ y_L-3 \\ z_L-0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.
   En coordonnées, l'égalité $3\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC}$ devient donc : $\begin{cases} 3x_L & =0 \\ 3(y_L-3) & =-3 \\ 3z_L & =6 \end{cases}$.
   Donc, après calcul : $\begin{cases} x_L & =0 \\ y_L & =2 \\ z_L & =2 \end{cases}$ donc $\mathbf{L\ (0;2;2)}$.

2. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   Les points A, M et L sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AL}$.
   En coordonnées, on obtient : $\begin{cases} -4k & =-3 \\ 2k & =\frac{3}{2} \\ 2k & =\frac{3}{2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} k & =\frac{3}{4} \\ k & =\frac{3}{4} \\ k & =\frac{3}{4} \end{cases}$ donc : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AL}$.
   Par suite, **les points A, M et L sont alignés.**

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie analytique de l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	$1^{ère}$ et $2^{ème}$ Bac International et mission française

3. Il faut d'abord montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}$.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

En coordonnées, on obtient : $\begin{cases}-4k &= -4\\ 0 &= 3\\ 6k &= 0\end{cases}$, ce qui est impossible.

Par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

Dans ce cas, les points A, B, C et M sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

En coordonnées, on obtient : $\begin{cases}-4a-4b &= -3\\ 3a &= \frac{3}{2}\\ 6b &= \frac{3}{2}\end{cases}$.

La deuxième équation donne $a = \frac{1}{2}$ et la dernière équation donne $b = \frac{1}{4}$. Reste à vérifier la première équation : $-4\times\frac{1}{2} - 4\times\frac{1}{4} = -2-1 = -3$.

Cette équation est vérifiée donc **les points A, B, C et M sont coplanaires.**

II) Distance, orthogonalité

Propriété :

On se place dans un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé.

1. Si le vecteur $\vec{u}$ a comme coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, alors sa norme est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

2. Si $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et si $B\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ alors :

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

2) Relation d'orthogonalité de deux vecteurs

Propriété (admise) : On se place dans un repère orthonormé.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$aa'+bb'+cc' = 0$$

III) Représentations paramétriques d'une droite de l'Espace

1) Définition

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie analytique de l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1ère et 2ème Bac International et mission française

On se place dans un repère $\left(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}\right)$ de l'Espace.

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur *directeur* $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$M\,(x\,;y\,;z)$ est un point de $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$.
En passant aux coordonnées, on obtient :

$$\begin{cases}x-x_A=at\\y-y_A=bt\\z-z_A=ct\end{cases}\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}$$

Définition : On appelle représentation paramétrique ou syst d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ par un point $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ le système :

$$\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}\qquad\text{avec } t\in\mathbb{R}$$

Le réel t est appelé paramètre.

IV) Equation cartésienne d'un plan

Définition .

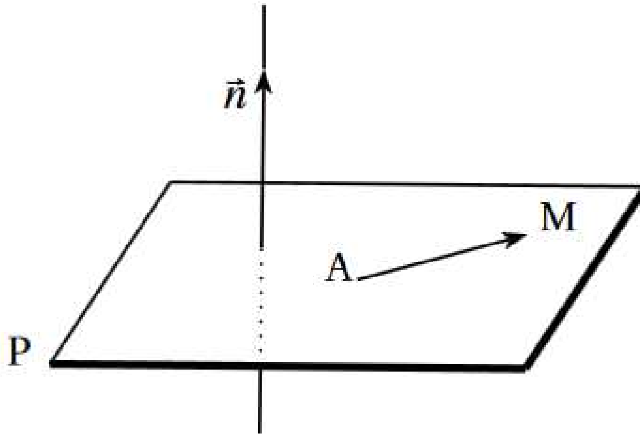
Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale à P.

Soit A un point d'un plan P et $\vec{n}$ un vecteur normal à P.
On a, pour tout point M du plan P,

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$

Réciproquement, si M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, alors $M\in P$ On a donc le résultat suivant :

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie analytique de l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1ère et 2ème Bac International et mission française



Propriété . (Caractérisation d'un plan P)

Le plan P qui passe par A et qui est orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Théorème

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, tout plan P admet une équation (dite cartésienne) de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

avec a, b, c réels non tous nuls et d réel.
De plus le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est normal à P

Preuve

Notons $A(x_0;y_0;z_0)$ un point de P et $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal à P, alors on a :

$$M(x;y;z) \in P \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

i.e

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Longleftrightarrow ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0$$

En posant $d=-ax_0-by_0-cz_0$ on obtient le résultat désiré

Indication => si ax+by+cz+d=0 est une équation cartésienne d'un plan alors le vecteur (a,b,c) est normal au Plan

Théorème

Deux plans P et Q sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
Deux plans P et Q sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Corollaire

Soit deux plans P et Q d'équations

$$\mathrm{P}: ax+by+cz+d=0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}: a'x+b'y+c'z+d'=0$$

1. $\mathrm{P}//\mathrm{Q} \Longleftrightarrow (a,b,c)$ et (a',b',c') sont proportionnels.
2. $\mathrm{P}\perp\mathrm{Q} \Longleftrightarrow aa'+bb'+cc'=0$.

V) les poisitions relatives de droites et de plans

1) Intersection d'une droite et d'un plan

Considérons un plan P d'équation

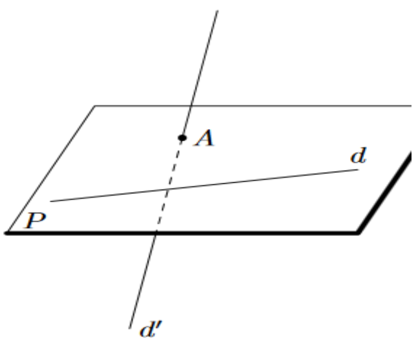
$$ax+by+cz+d=0$$

et une droite d dont on connaît une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=\alpha t+x_0 \\ y=\beta t+y_0 \\ z=\gamma t+z_0 \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

Il n'existe que trois possibilités :

1. la droite et le plan n'ont qu'un point commun, la droite et le plan sont dits sécants,



2. la droite est incluse dans le plan,
3. la droite et le plan n'ont aucun point commun.

C'est le premier cas qui nous intéresse, pour cela supposons que le vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ au plan P et le vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ ne sont pas orthogonaux (comme dans les cas deux et trois), ainsi P et d sont sécants en un point A.

On cherche alors les coordonnées de A en résolvant l'équation suivante (d'inconnue t) :

$$a(\alpha t+x_0)+b(\beta t+y_0)+c(\gamma t+z_0)=0$$

i.e (en factorisant par t) :

$$t(a\alpha+b\beta+c\gamma)=-x_0-y_0-z_0$$

Comme on a supposé $\vec{n}\cdot\vec{u}\neq 0$, on peut diviser par $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$ et on obtient :

$$\boxed{t=\frac{-x_0-y_0-z_0}{a\alpha+b\beta+c\gamma}}$$

Finalement, en remplaçant dans le système de représentation paramétrique de d , on trouve les coordonnées de A. Mais observons sur un exemple. . . .

2) *Intersection de deux droites*

On donne deux droites d et d' dont on connaît les représentations paramétriques :

$$d:\begin{cases} x=\alpha t+x_0 \\ y=\beta t+y_0 \\ z=\gamma t+z_0 \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

$$d':\begin{cases} x=\alpha' t'+x_1 \\ y=\beta' t'+y_1 \\ z=\gamma' t'+z_1 \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

d et d' sont deux droites de l'espace. Il n'existe que deux possibilités

1. il n'existe aucun plan contenant ces deux droites, elles sont dites non coplanaires,
2. il existe un plan contenant ces deux droites, elles sont dites coplanaires (elles sont alors sécantes ou parallèles dans ce plan).

On résout alors le système (qui peut ne pas avoir de solutions) (d'inconnues t et t') :

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_0 = \alpha' t' + x_1 \\ \beta t + y_0 = \beta' t' + y_1 \\ \gamma t + z_0 = \gamma' t' + z_1 \end{cases}$$

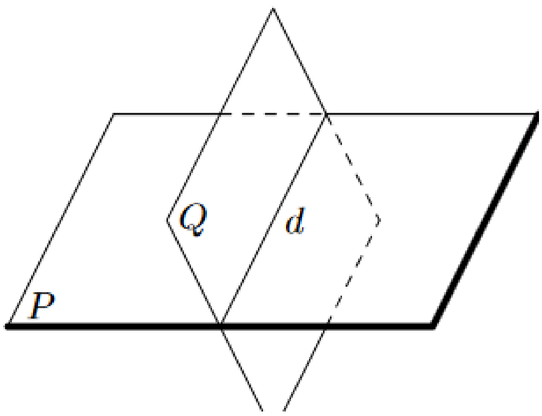
3) Intersection de deux plans

On considère deux plans sécants P et Q d'équations cartésiennes respectives :

$$\mathrm{P} : ax + by + cz + d = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{Q} : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

P et Q sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

1. les plans ont un point commun et sont distincts, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point, (ainsi deux plans distincts qui ont deux points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points)



2. les plans sont confondus,

3. ils n'ont aucun point commun.

Lorsque les deux plans sont sécants, on peut alors récupérer le système de représentation paramétrique de la droite d'intersection en utilisant une des trois coordonnées comme paramètre et en résolvant le système

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Géométrie analytique de l'espace (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	$1^{ère}$ et $2^{ème}$ Bac International et mission française

Exercice1

soient les points $A(-1;1;0)$ et $B(2;-1;1)$ et $C(0;-1;2)$

1)Déterminer deux équations cartésiennes de la droite(AB)

Est-ce que point $C(0;-1;2)\in(AB)$?

Solution : $\overrightarrow{AB}(3;-2;1)$

Donc : $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ les deux équations cartésiennes de la droite(AB)

On remplace les coordonnées de C dans les équations de la droite(AB)

Et puisque : $\frac{0+1}{3}\neq\frac{-1-1}{-2}$ donc $C\notin(AB)$

Exercice 2

Déterminer une représentation paramétrique du plan passant par les points :

$A(2;-1;-3)$ et $B(0;1;4)$ et $C(-3;0;0)$

Solution : ABC est le plan passant par $A(2;-1;-3)$ et $\overrightarrow{AB}(-2;2;7)$ et $\overrightarrow{AC}(-5;1;3)$

Sont deux vecteurs directeurs

Donc une représentation paramétrique du plan ABC est : $\begin{cases} x=2-2t-5t' \\ y=-1+4t+t' \\ z=-3+7t+3t' \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ et $(t'\in\mathbb{R})$

Le dernier système est une représentation paramétrique du plan (ABC) c'est à dire que les coordonnées (x ; y ; z) d'un point quelconque du plan dépendent de paramètres qui sont ici t et t', mais il existe d'autre représentation paramétrique pour ce plan.

Exercice 3

Déterminer l'équation cartésienne du plan $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ qui passe par $A(1;-3;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(-2;4;1)$ et $\vec{v}(-1;0;2)$

solution : $M(x;y;z) \in P(A;\vec{u};\vec{v}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}) = 0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y+3;z-1)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y+3 & 4 & 0 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y+3)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$8(x-1)+3(y+3)+4(z-1)=0 \Leftrightarrow 8x-8+3y+9+4z-4=0$$

$$(P): 8x+3y+4z-3=0$$

Exercice 4

Soient les droites (D_1) et (Δ_1) de représentations paramétriques respectives

$$(D_1)\begin{cases} x=-2+k \\ y=2-2k \ (k\in\mathbb{R}) \\ z=4+k \end{cases} \quad (\Delta_1)\begin{cases} x=-1-t \\ y=2t \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z=1+t \end{cases}$$

Etudier la position relatif de (Δ_1) et (D_1)

Solution : on a : $\vec{u}(1;-2;1)$ un vecteur directeur de (D_1) et $\vec{v}(-1;2;1)$ un vecteur directeur de (Δ_1)

et puisque : $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires donc les droites (Δ_1) et (D_1) sont non parallèles

on va déterminer l'intersection de (Δ_1) et (D_1)

Donc on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -2+k=-1-t \\ 2-2k=2t \\ 4+k=1+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+k=1 \\ t+k=1 \\ t-k=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+k=1 \\ t-k=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t=4 \\ t-k=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ k=-1 \end{cases}$$

On remplaçant $t=2$ dans l'équation paramétriques de (Δ_1) On trouve :

$\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$ Donc les droites (Δ_1) et (D_1) se coupent en $E(-3;4;3)$

Exercice 5

Soit la droite D1

$$(D_1)\begin{cases} x=-4t+2 \\ y=2t-1 \\ z=3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

et le plan (P_1) d'équation cartésienne:

$$(P_1): 3x+2y+z+1=0$$

Etudier la position relatif de (D_1) et (P_1)

Solution :

on a (D_1) est de vecteur directeur $\vec{u}(-4;2;3)$

Et on a : $3(-4)+2\times2+3\neq0$

donc (D_1)) coupe (P_1) en un point unique

on a $M(x;y;z)\in(D_1)\cap(P_1)\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}/$

$$\begin{cases} x=-4t+2 \\ y=2t-1 \\ z=3t \\ 3x+2y+z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4t+2 \\ y=2t-1 \\ z=3t \\ 3(-4t+2)+2(2t-1)+3t+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=-2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

donc (D_1)) coupe (P_1) au point $A(-2;1;3)$