

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Rotation dans le plan (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac BIOF science SE et SM

La rotation dans le Plan

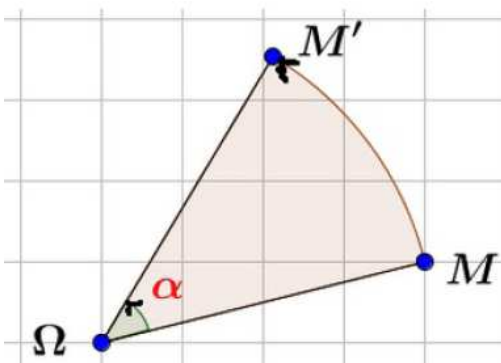
I- Rotation et rotation réciproque

1-1/ Rotation

Soit Ω un point du plan orienté dans le sens direct et $\alpha \in \mathbb{R}$.

La rotation de centre Ω et d'angle α est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

- Si $M = \Omega$ alors : $M' = \Omega$
- Si $M \neq \Omega$ alors :
$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}} \right) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$$



Formule analytique d'une rotation

La rotation de centre Ω et d'angle α est notée : $r(\Omega, \alpha)$

$$r(M) = M'.$$

1-2/ Rotation réciproque

Soit r une rotation de centre O et d'angle α .

La rotation de centre O et d'angle $-\alpha$ est appelée rotation réciproque de r . On la note r^{-1} .

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Rotation dans le plan (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac BIOF science SE et SM

II- Caractérisatiques et propriétés de la rotation

Propriété 1

La rotation conserve :

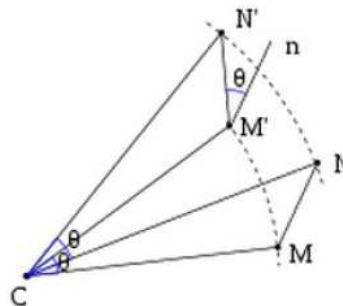
- les longueurs ;
- les angles (l'image d'un angle est un angle de même amplitude) ;
- les parallèles (les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles) ;
- les aires (l'image d'une figure est une figure de même aire).

Propriété 2

Soient M et N deux points du plan distincts.

On note M' et N' leurs images respectives par la rotation de centre C et d'angle θ .

$$\boxed{\begin{aligned} MN &= M'N' \\ \left(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'} \right) &\equiv \theta [2\pi] \end{aligned}}$$



Propriété 3

Une rotation transforme trois points alignés dans un ordre en trois points alignés dans le même ordre.

Propriété 4

soient A , B et C trois points du plan distincts.

On note A' , B' et C' leurs images respectives par la rotation de centre O et d'angle α .

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right) = \left(\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'} \right)$$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Rotation dans le plan (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac BIOF science SE et SM

III- Image d'une droite, d'un segment et d'un cercle

Soit r une rotation. Soit A et B deux points tels que $A \neq B$.

- (1) L'image de la droite (AB) par la rotation r est la droite $(A'B')$ telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.
- (2) L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.
- (3) L'image du cercle F par la rotation r est le cercle F' .

Exercice1 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ positif. Soit r_A la rotation de centre A

et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O une rotation de centre O et d'angle α .

1) Déterminer $r_A(A)$; $r_A(B)$; $r_A(D)$,

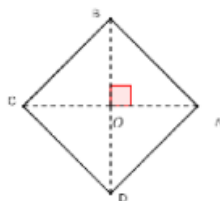
2) Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = B$?

Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = C$?

Solution : $r_A\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$ et

$r_O(O; \alpha)$

• $r_A(A) = A$ Car le centre est le seul point invariant.



• $r_A(B) = D$ Car $\begin{cases} AB = AD \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

• $r_A(D) = B'$ avec B' le symétrique de B par rapport à A

2) $r_O(A) = B \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

$r_O(A) = C \Leftrightarrow \alpha = \pi$

Exercice2 : ABC est un triangle.

On construit à l'extérieur deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A

1) Montrer que : $BE = CD$

2) Montrer que : $(BE) \perp (CD)$

Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Rotation dans le plan (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac BIOF science SE et SM

Solution : Soit r la rotation

de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$$\text{On a : } \begin{cases} AD = AB \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\text{donc : } r(D) = B \text{ ①}$$

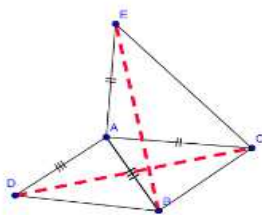
$$\text{On a : } \begin{cases} AC = AE \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ donc : ② } r(C) = E$$

Et puisque la rotation conserve les distances

Alors de ① et ② en déduit que $BE = CD$

$$2) \text{ on a } r(D) = B \text{ et } r(C) = E$$

$$\text{Donc : } (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EB}) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ par suite : } (BE) \perp (CD)$$



Exercice3 : ABC est un triangle tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ positif. On construit à l'extérieur les carrés $ABDE$ et $ACFG$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

déterminer : $r(E)$ et $r(C)$

$$\text{Et Montrer que : } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) [2\pi]$$

Solution :

$$\text{on a : } \begin{cases} AE = AB \\ (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

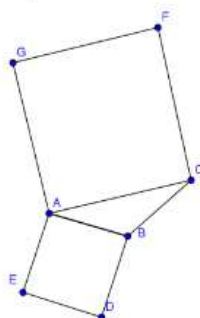
$$\text{Donc : } r(E) = B \text{ ①}$$

$$\text{Et on a : } \begin{cases} AC = AG \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\text{Donc : ② } r(C) = G$$

$$\text{Et on a : } r(A) = A \text{ ③ car } A \text{ le centre de la rotation}$$

$$\text{De : ① et ② et ③ en déduit que } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) [2\pi]$$



Professeur	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
Chapitre	Rotation dans le plan (l'essentiel du cours + applications)
Niveaux	1 ^{ère} bac BIOF science SE et SM

Exercice4 : ABCD est un carré de centre O
tel que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ positif.

I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

Montrer que $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$

Solution : il suffit de montrer

que : $r(I) = J$

On pose : $r(I) = I'$

On a : $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ donc

$$r(A) = B$$

Et on a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BI'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❶ car la

rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❷

De ❶ et ❷ on déduit que $\overrightarrow{BI'} = \overrightarrow{BJ}$ donc $I' = J$

Donc $r(I) = J$ par suite : $\begin{cases} OI = OJ \\ (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

