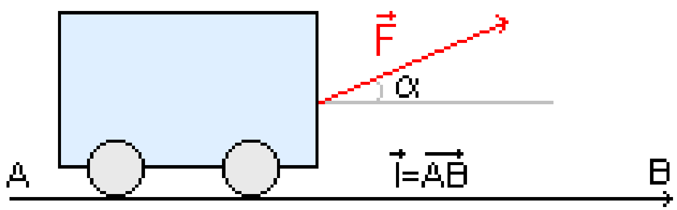
Objectifs

1. Comprendre la notion de force conservative
2. Etudier le cas du poids d'un corps
3. Relier la notion de force conservative à l'énergie potentielle
4. Enoncer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur
5. Enoncer les théorèmes de l'énergie cinétique, de la variation de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique.
6. Etude énergétique du pendule simple

Travail d'une force constante



On appelle travail d'une force constante lors d'un déplacement rectiligne AB de son point d'application, le produit scalaire de la force par le déplacement

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

$$W_{AB}(\vec{F}) = F \times AB \times \cos(\alpha)$$

$W_{AB}(\vec{F})$: Travail de la force (J)

AB: Déplacement du point d'application de la force (m)

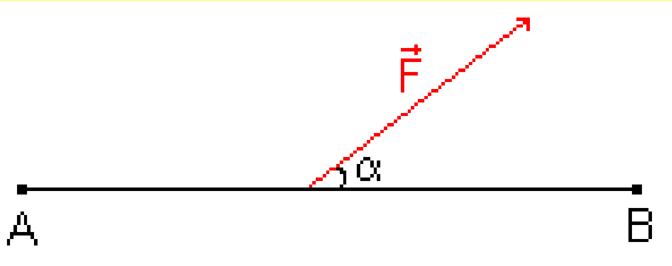
α: Angle existant entre les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{AB}$.

Le travail d'une force constante ne dépend pas du chemin suivi

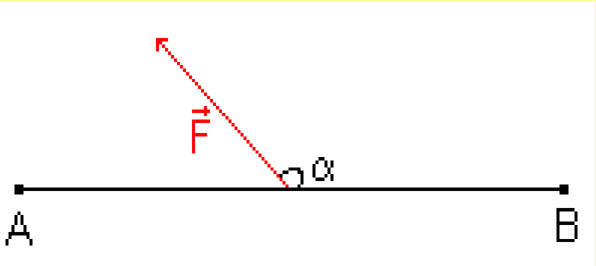
<u>Remarque:</u> Une force ne travaille pas si:

- Son point d'application ne se déplace pas (AB=0).
- Sa direction est perpendiculaire au déplacement ($\alpha = 90°$).

Travail moteur et résistant



W>0
travail moteur



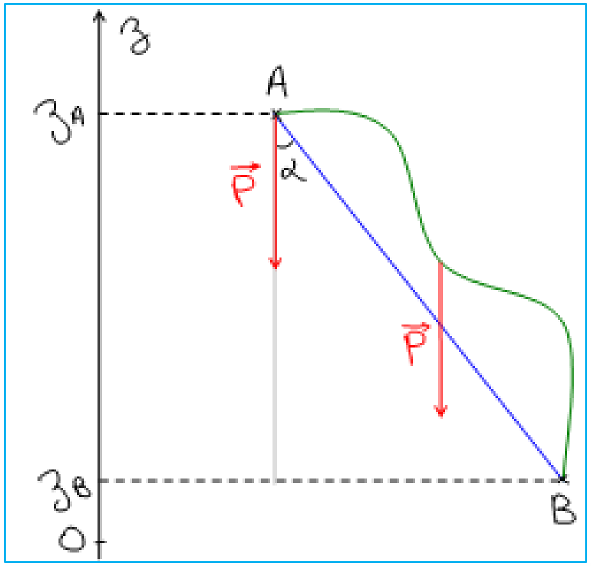
W<0
travail résistant

NB

L'angle α est pris de $\vec{AB}$ vers $\vec{F}$

Travail du poids

Un solide se déplace de A vers B en empruntant la trajectoire verte.



$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} \qquad W_{AB}(\vec{F}) = P.AB.\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) \times \mathrm{AB} = Z_a - Z_b$$

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = mg(Z_a - Z_b)}$$

$W_{AB}(\vec{P})$: travail du poids (J)

m: masse du solide (kg)

z_A et z_B: Altitude des points A et B (m)

Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi, il dépend que de la position initiale et finale
Le poids est considéré comme une force **conservative**

Energie potentielle de pesanteur

Remarquant que le travail du poids est égale à la différence

$$mgz_a - mgz_b$$

Le travail du poids est égal à la diminution (contraire d'une variation) d'une grandeur physique qu'on peut écrire

$$mgz + k$$

constante

On définit ainsi l'énergie potentielle de pesanteur

$$\boxed{E_{pp}(z) = mgz + k}$$

K est une constante elle désigne l'énergie
De potentielle de pesanteur à z=o

Force conservative

Une force conservative est une force dont le travail ne dépond pas du chemin suivi (comme le poids).
Pour une telle force on définit une énergie potentielle dont la diminution est égal au travail de cette force.

Le travail d'une force conservative est égale à la diminution De l'énergie potentielle correspondante entre la position De départ est celle d'arrivée.

$$W(\overrightarrow{F}cons) = -\Delta E_p$$

Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique d'un système est égale à la somme des travaux des forces extérieures agissantes sur le système

$$\Delta E_c = \sum_{i=1}^{n} W_i(\overrightarrow{F}_{ext})$$

$$\Delta E_c = Ec_2 - Ec_1$$

L'énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p$$

Energie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p$$

Travail des forces extérieures Conservatives et non conservatives

L'opposé du travail des forces conservatives

$$\Delta E_c = \sum_{i=1}^{n} W_i(\vec{F}_{ext})$$

$$\Delta E_p = -W(\vec{F}cons)$$

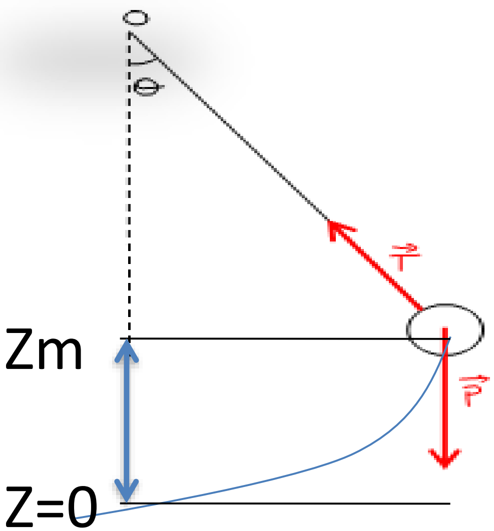
$$\Delta E_m = \sum \vec{F}(\text{dissipatives})$$

Théorème de l'énergie mécanique

La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservatives (dissipatives) (forces de frottement)

L'énergie est conservée si le système est isolé ou s'il n'est soumis qu'à des forces conservatives

Le pendule simple



l'experience montre que la periode

est égale à $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

T *= periode en seconde*

l *= longueur en metre*

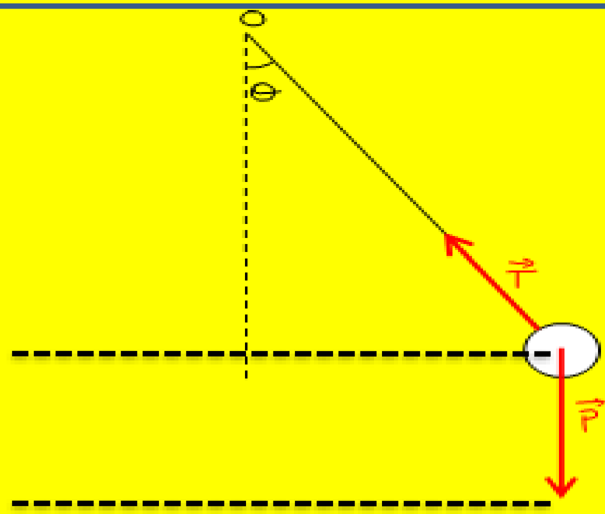
g *= acceleration de la pesenteur*

La boule est soumise à l'action de son poids P et à l'action de la tension T du fil. seul le poids travaille car la tension reste perpendiculaire à la trajectoire et par suite son travail est nul. Le poids d'un corps est une force conservative donc l'énergie du pendule est conservé dans le temps.

- Z=0 l'énergie potentielle est nulle alors que l'énergie cinétique est à son maximum.

- Z=Zm l'énergie cinétique est nulle alors l'énergie potentielle est maximale.

$$E_m = E_c + E_p$$



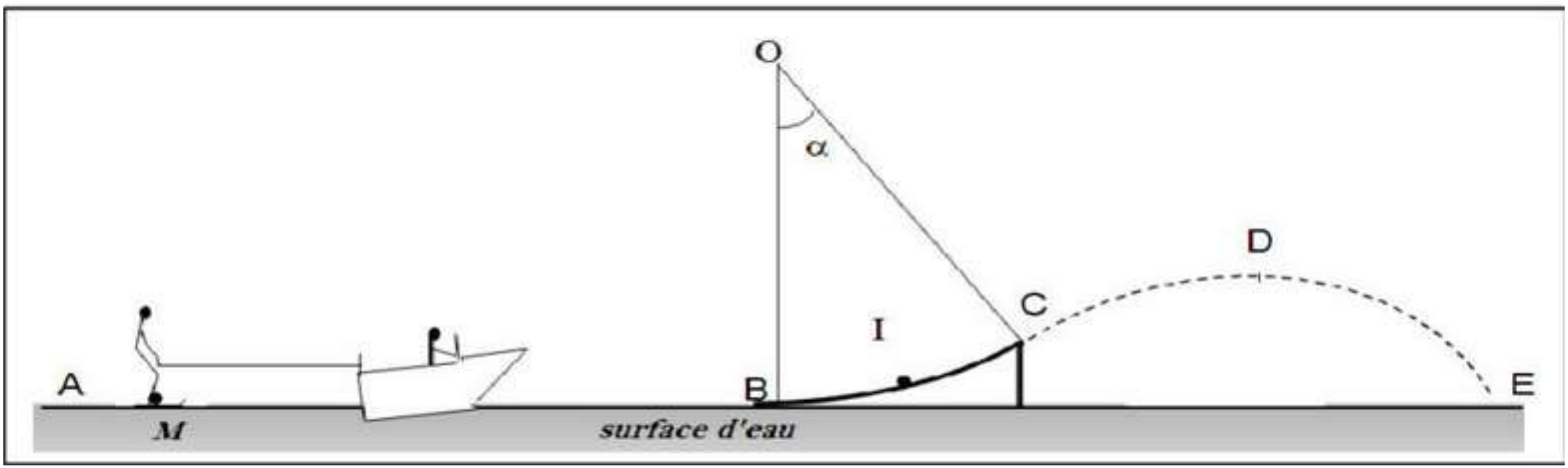
$$E_m = E_p(\max)$$

$$E_m = E_c(\max)$$

Application 1

Un skieur de masse m = 100 kg (équipement compris) est tiré par un bateau à l'aide d'une corde parallèle à la surface de l'eau.

Données : $g = 10\ N.kg^{-1}$; $L = AB = 200\ m$; $\alpha = 30°$; $OB = OC = 15\ m$



Application 1

Dans tout le problème, par souci de simplification on représentera le système {skieur + skis} par un point matériel M situé au niveau des skis.

<u>1ère étape (trajet horizontal AB) :</u>

Le skieur démarre sans vitesse initiale du point A. Il est tracté par la force $\vec{F}$ constante et l'ensemble des forces de frottement est représenté par la force horizontale $\vec{f}$ d'intensité $f = 100$ N.

Après un parcours de $AB = L = 200$ m, le skieur atteint une vitesse $v_B = 20$ m.s^{-1}.

1. *Faire le bilan des forces s'exerçant sur le système {skieur+skis} .*
2. *Enoncé le théorème de l'énergie cinétique.*
3. *Exprimer les travaux des forces s'exerçant sur le système .*
4. *En déduire l'expression la force de traction $\vec{F}$ en fonction de m, L, f, v_B. Calculer F .*

Application 1

2ème étape (trajet BC) :

Le skieur lâche la corde en B et parcourt, sans frottement, le tremplin circulaire BC de centre O de rayon OB = 15 m.

Le rayon OC fait un angle de 30° avec la verticale passante par O.

1. *Exprimer la hauteur h acquise en haut du tremplin en fonction de OB et α.*
2. *En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer la vitesse v_C du skieur au point C en fonction de v_B, α, g et OB. Calculer v_C.*

Solution

Application 1

<u>*Etude de la 1ère étape:*</u>

1) *Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, le système skieur+skis est soumis à 4 forces :*

   - *le poids* $\vec{P}$
   - *la réaction normale* $\overrightarrow{R_N}$
   - *la traction du bateau* $\vec{F}$
   - *la force de frottement* $\vec{f}$

2) *Théorème de l'énergie cinétique : la variation de l'énergie cinétique d'un système en translation entre deux positions A et B est égale à la somme des travaux des forces extérieures exercées sur le système.* $\boxed{\Delta Ec = \Sigma W(\vec{F}_{ext})}$

Application 1

3) *Les travaux du poids et de la réaction normale sont nuls car les forces sont perpendiculaires au déplacement.* $\boxed{W(\vec{P}) = W(\vec{R}_N) = 0}$

$W(\vec{f}) = \vec{f}.\vec{AB} = f.AB\cos 180 = -f.L$

$W(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{AB} = F.AB\cos 0 = F.L$

4) *D'après le théorème de l'énergie cinétique :* $\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = F.L - f.L$

Comme $v_A = 0$ *on obtient* $\boxed{F = \frac{mv_B^2}{2L} + f}$

5) *AN :* $\boxed{F = \frac{100 \times 20^2}{2 \times 200} + 100 = 200N}$

Application 1

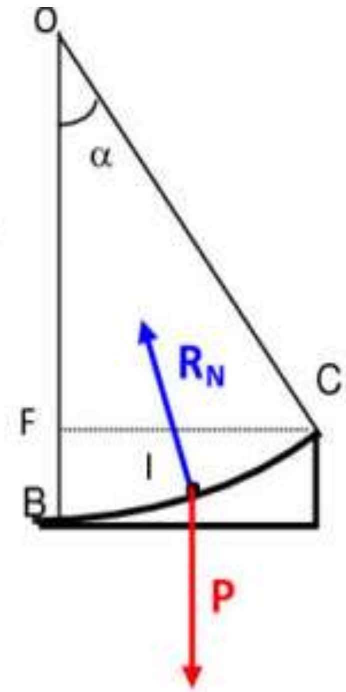
<u>Etude de la 2ème étape :</u>

1) Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, le système skieur+skis est soumis à 2 forces :
   - le poids $\vec{P}$
   - la réaction normale $\overrightarrow{R_N}$

2) La hauteur h acquise en haut du tremplin correspond à :
   $h = FB = OB - OF$

   $\cos\alpha = \dfrac{OF}{OC} = \dfrac{OF}{OB}$ soit $OF = OB\cos\alpha$

   On obtient finalement $\boxed{h = OB(1-\cos\alpha)}$



Application 1

3) Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et B

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N)$$

avec $W(\vec{R}_N) = 0$ car la réaction normale est perpendiculaire au déplacement

et $W(\vec{P}) = -mgh$ car le travail est résistant

On obtient donc : $\boxed{v_C = \sqrt{v_B^2 - 2gOB(1-\cos\alpha)}}$

4) AN : $v_C = \sqrt{20^2 - 2\times10\times15\times(1-\cos\alpha)} = \sqrt{400 - 20\times2} = \sqrt{360} = 19 m.s^{-1}$

Application 2

Un corps solide, descend une pente $AB = 10\ m$ en ligne droite, sans frottement, le plan incliné fait angle α avec l'horizontale. Au point A sa vitesse était nulle, à l'arrivée au point B sa vitesse est $v = 8\ km/h$.

Calculer l'angle α.

Solution

Application 2

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre

A et B :

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{R})$$

$$\frac{1}{2}m.V^2 = m.g(z_A - z_B) + R.AB.cos90°$$

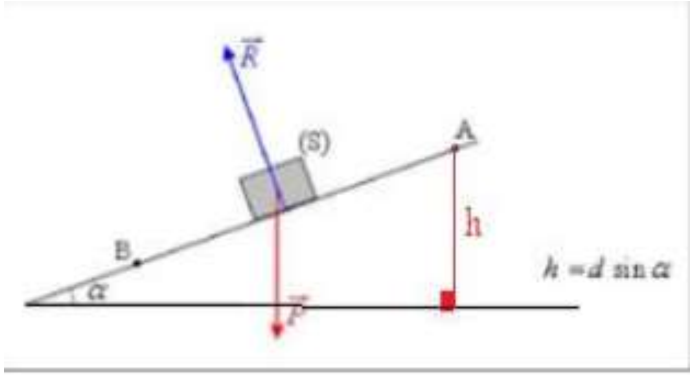
$$\frac{1}{2}m.V^2 = m.g.h + 0$$

$$V^2 = 2g.AB.sin\alpha$$

$$sin\alpha = \frac{V^2}{2g.AB}$$

$$sin\alpha = \frac{8{,}0^2}{2 \times 9{,}81 \times 10} = 0{,}326$$

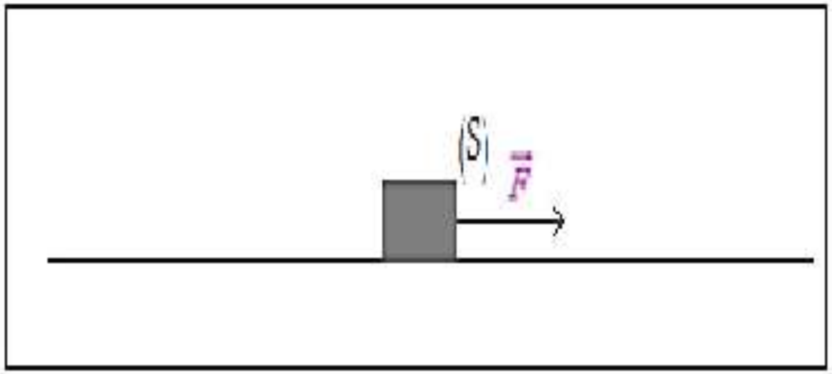
$$\alpha = 19{,}0°$$



Application 3

Un mobile S de masse $m = 1{,}5.10^3\ kg$ est en mouvement rectiligne uniforme de vitesse $V = 30\ km.h^{-1}$.

A l'instant $t = 0$ on applique sur le mobile une force $\vec{F}$ dont la direction et le sens du mouvement sa puissance constante est égale $\mathcal{P} = 66\ kW$.



1)- Calculer la valeur de la vitesse V' en $(km.h^{-1})$ à l'instant $t = 10s$.

2)- Déduire la valeur de la force $\vec{F}$ à cet instant.

Solution

Application 3

1)- La valeur de la vitesse à l'instant $t = 10s$:

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant $t = 0$ point A et l'instant $t = 10s$ point B :

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{A \to B}(\vec{P}) + W_{A \to B}(\vec{R}) + W_{A \to B}(\vec{F})$$

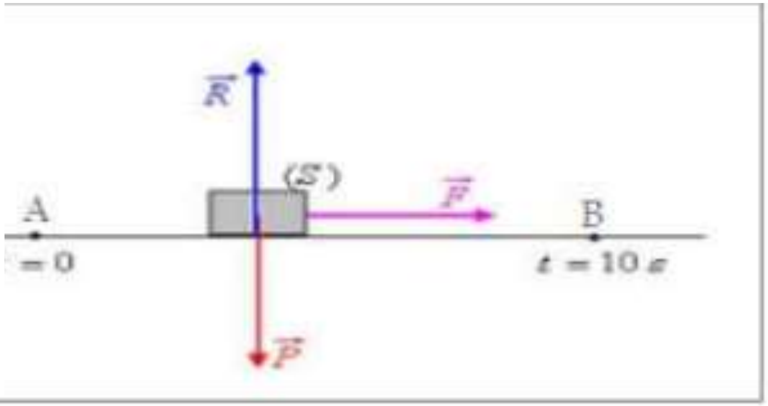
$$\frac{1}{2}m.V'^2 - \frac{1}{2}m.V^2 = \vec{P}.\overrightarrow{AB} + \vec{R}.\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{\mathcal{P}}.\boldsymbol{\Delta t}$$

$$\frac{1}{2}m(V'^2 - V^2) = 0 + 0 + \boldsymbol{\mathcal{P}}.\boldsymbol{\Delta t}$$

$$V'^2 - V^2 = \frac{2.\mathcal{P}.\Delta t}{m}$$

$$V'^2 = V^2 + \frac{2.\mathcal{P}.\Delta t}{m}$$

$$V' = \sqrt{V^2 + \frac{2.\mathcal{P}.\Delta t}{m}}$$



Application 3

$$V' = \sqrt{\left(\frac{30}{3,6}\right)^2 + \frac{2 \times 66 \times 10^3 \times (10-0)}{1,5 \times 10^3}} \qquad V' = 30,8 \times 3,6 = 111\ km.h^{-1}$$

2- la valeur de la force $\vec{F}$ à l'instant $t = 10s$:

La puissance de la force $\vec{F}$ à l'instant $t = 10s$ est :

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\overrightarrow{V'} = F.V'.cos0° = F.V'$$

$$F = \frac{\mathcal{P}}{V'}$$

$$F = \frac{66 \times 10^3}{30,8} = 2,1.10^3\ N$$

Application 4

Une bille est lancée verticalement vers le haut à une altitude $h = 2{,}0m$ par rapport au sol, avec une vitesse $v_A = 10\ m/s$.

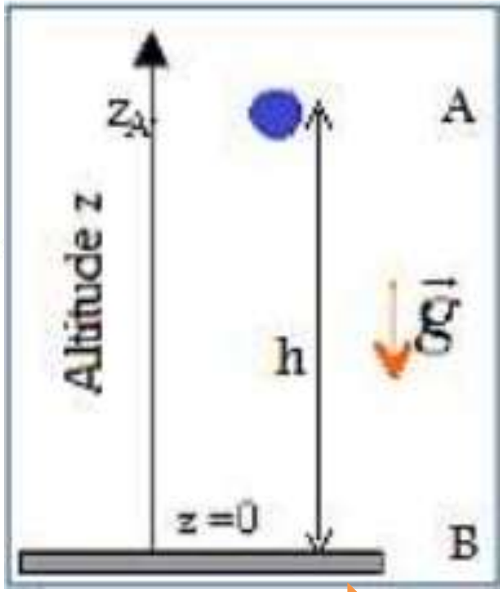
On considère que le poids est la seule force appliquée à la bille (chute libre) voir figure.

On donne $g = 10\,N/kg$.

Calculer en utilisant le théorème de l'énergie cinétique

1- La hauteur maximale atteinte par la bille.

2- La vitesse de la bille lorsqu'elle retombe sur le sol.



Solution

Application 4

1- La hauteur maximale atteinte par la bille :

Système étudié : la bille

Bilan des forces exercé : $\vec{P}$ poids de la bille

Etat du système	Etat initiale	Etat final
altitude	$z_A = 2,0\ m/s$	$z_B = ?$
Vitesse	$V_A = 10\ m/s$	$V_B = 0$

On applique le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{A\to B}(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = m.g(z_A - z_B)$$

$$-\frac{1}{2}V_A^2 = g(z_A - z_B) \Longrightarrow z_B = \frac{1}{2}.\frac{V_A^2}{g} + z_A$$

$$z_B = \frac{1}{2}.\frac{10^2}{10} + 2,0 \Longrightarrow z_B \simeq 7,1\ m$$

Application 4

2- vitesse de la bille lorsqu'elle retombe sur le sol :

Etat du système	Etat initiale	Etat final
altitude	$z_B = 7,1\ m/s$	$z_0 = 0$
Vitesse	$V_B = 0$	$V_B = ?$

On applique de nouveau le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = E_{C0} - E_{CB} = W_{B\to O}(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2}m.V_0^2 - \frac{1}{2}m.V_B^2 = m.g(z_B - z_O)$$

$$\frac{1}{2}V_0^2 = g.z_B \Rightarrow V_O = \sqrt{2g.z_B}$$

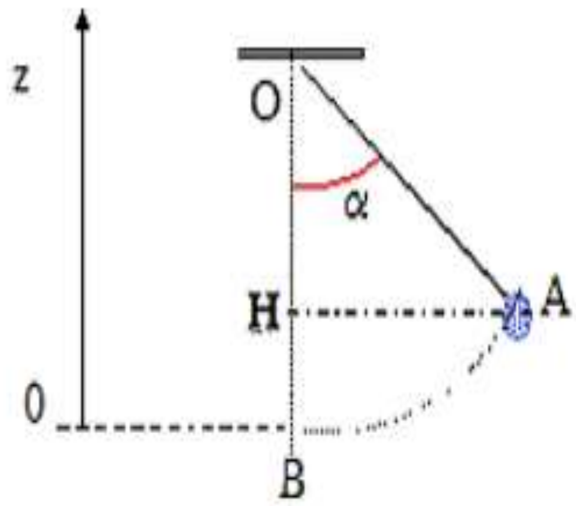
$$V_O = \sqrt{2 \times 10 \times 7{,}1} \Rightarrow V_O \simeq 12\,m/s$$

Application 5

Une pendule est constituée d'une bille de masse $m = 200g$, suspendue à un fil de longueur $L = 1{,}00m$.

On écarte le fil d'un angle $\alpha = 70°$ par rapport à la verticale (position A) et on l'abandonne sans vitesse initiale. On néglige les frottements.

On donne $g = 10\,N/kg$.



- Calculer la vitesse de la bille à son passage par la position d'équilibre (position B).

Solution

Application 5

Système étudié : la

Forces extérieures

Le poids : $\vec{P}$

La tension du fil : $\vec{T}$

Appliquant le théo

passage de la bille

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{T})$$

$$\frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = m.g(z_A - z_B) + 0$$

$$V_A = 0 \; et \;\; z_B = 0$$

$$z_A = OH = OB - OH = L - L.cos70° = L(1 - cos70°)$$

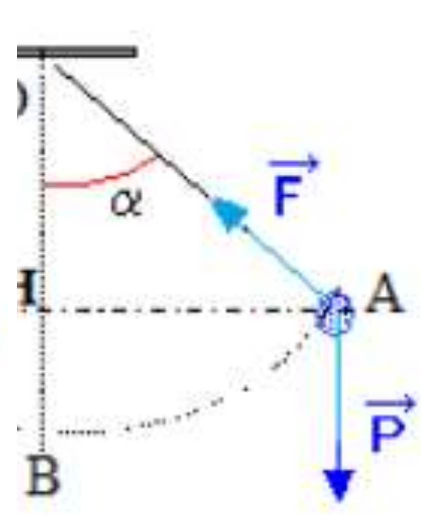
$$\frac{1}{2}V_B^2 = g.L(1 - cos70°)$$

$$V_B^2 = 2.g.L(1 - cos70°)$$

$$V_B = \sqrt{2.g.L(1 - cos70°)}$$

$$V_B = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 1{,}00 \times (1 - cos70°)}$$

$$V_B \simeq 3{,}6 \; m/s$$



Application 5

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{T})$$

$$\frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = m.g(z_A - z_B) + 0$$

$$V_A = 0 \; et \;\; z_B = 0$$

$$z_A = OH = OB - OH = L - L.cos70° = L(1 - cos70°)$$

$$\frac{1}{2}V_B^2 = g.L(1 - cos70°)$$

$$V_B^2 = 2.g.L(1 - cos70°)$$

$$V_B = \sqrt{2.g.L(1 - cos70°)}$$

$$V_B = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 1{,}00 \times (1 - cos70°)}$$

$$V_B \simeq 3{,}6 \; m/s$$

Application 6

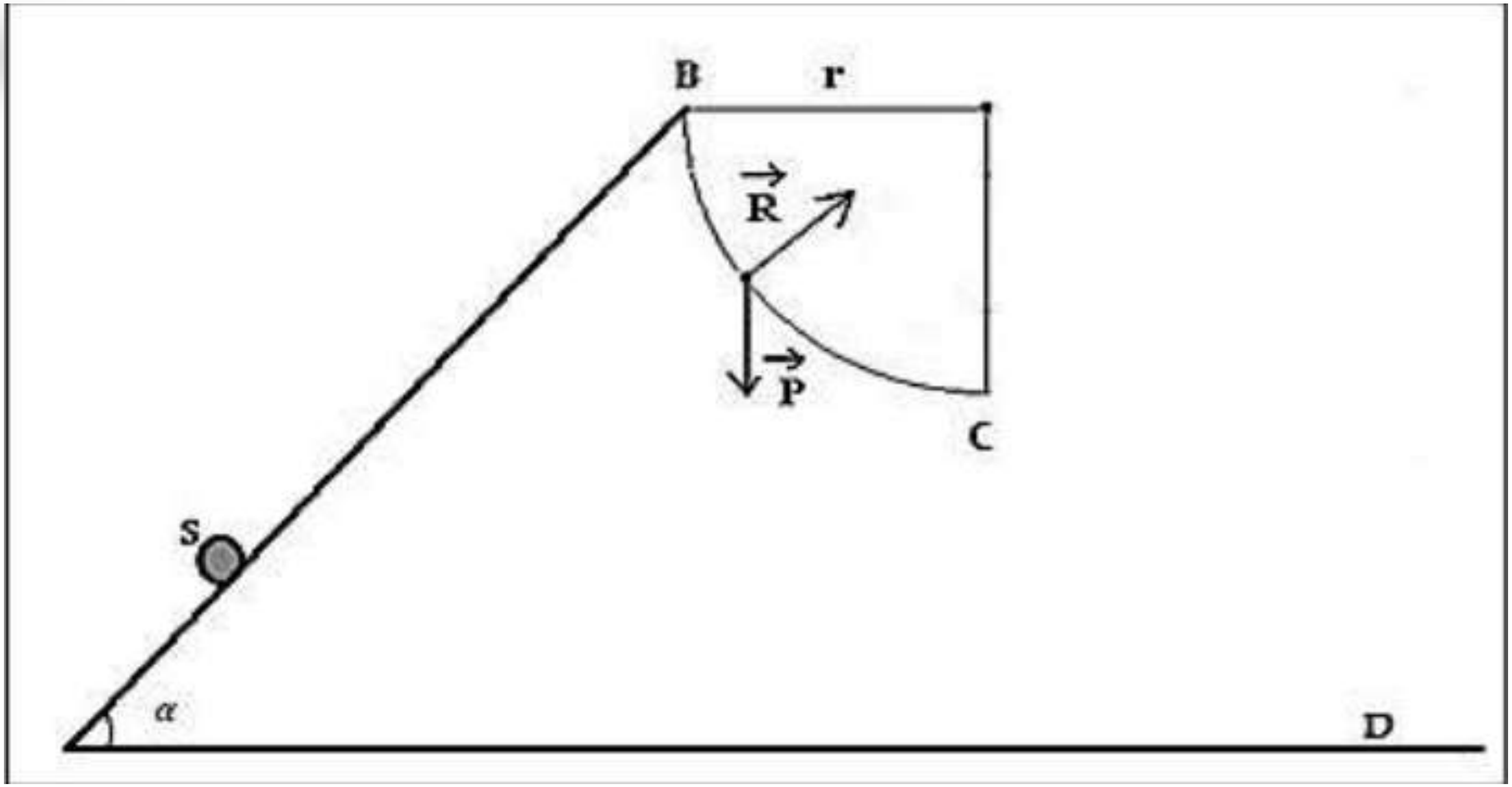
Un solide S assimilable à un point matériel de masse $m = 50g$ est en mouvement sur une piste constituée d'une partie rectiligne AB inclinée d'un angle $\alpha = 60°$ par rapport à l'horizontale et d'une partie circulaire BC de centre I et de rayon $r = 0,5\ m$ (voir figure ci-dessous).

1- Le point matériel S est lancée du point A avec une vitesse $V_A = 6\ m/s$. Il arrive au point B avec une vitesse nulle. Calculer la distance AB sachant que le point matériel est soumis à une force $\vec{f}$ parallèle et de sens contraire à celui de sa vitesse à chaque instant, d'intensité constante $f = 10^{-2}\ N$.

2- On néglige les frottements sur la partie circulaire BC. Calculer la vitesse V_C de S au point C.

3- Le point matériel quitte le point C avec la vitesse V_C. Calculer la vitesse V_D du point matériel au point D.

Application 6

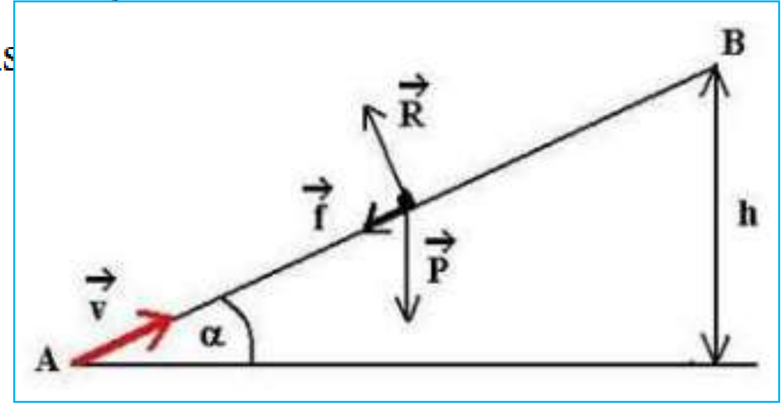


Solution

Application 6

L'inventaire des forces extérieures appliquées sur le point matériel S :

$\vec{P}$: le poids vertical, $\vec{R}$: la réaction normale de la pente, $\vec{f}$: la force de frottement parallèle à la pente et de sens contraire au déplacement.



On applique le théorème de l'énergie cinétique :

Application 6

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{R}) + W_{A\to B}(\vec{f})$$

$$\frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = \vec{P}.\overrightarrow{AB} + \vec{R}.\overrightarrow{AB} + \vec{f}.\overrightarrow{AB}$$

$$-\frac{1}{2}m.V_A^2 = m.g.(z_A - z_B) + 0 + f.AB.cos180°$$

$$-\frac{1}{2}m.V_A^2 = -m.g.AB.sin\alpha - f.AB$$

$$\frac{1}{2}m.V_A^2 = AB(m.g.sin\alpha + f)$$

$$AB = \frac{m.V_A^2}{2(m.g.sin\alpha + f)}$$

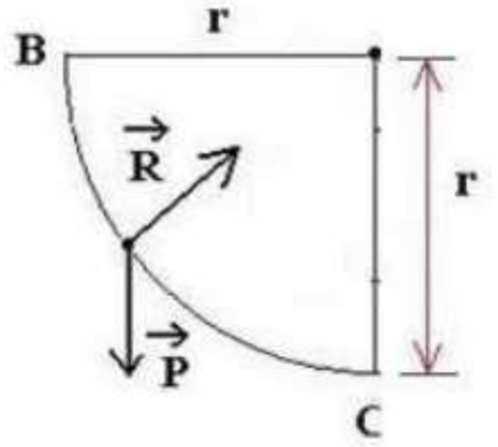
$$AB = \frac{50.10^{-3} \times 6^2}{2 \times (50.10^{-3} \times 10 \times \sin(60°) + 10^{-2})} \simeq 2{,}0\ m$$

Application 6

2- La vitesse de S au point C :

L'inventaire des forces extérieures appliquées sur le point matériel S entre B et C :

$\vec{P}$: le poids vertical, $\vec{R}$: la réaction normale de la pente (les frottements étant négligés).



On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = E_{CC} - E_{CB} = W_{B \to C}(\vec{P}) + W_{B \to C}(\vec{R})$$

$$\frac{1}{2} m.V_C^2 - \frac{1}{2} m.V_B^2 = mg(z_C - z_B)$$

$$\frac{1}{2} V_C^2 = g.r \quad \Rightarrow V_C = \sqrt{2g.r}$$

$$V_O = \sqrt{2 \times 10 \times 0{,}5} \Rightarrow V_O \simeq 3{,}16\, m/s$$

Application 6

3- La vitesse de S au point D :

L'inventaire des forces extérieures appliquées sur le point matériel S entre B et C :

$\vec{P}$: Le poids vertical (corps en chute libre).

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre C et D :

$$\Delta E_C = E_{CD} - E_{CC} = W_{C\to D}(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2}m.V_D^2 - \frac{1}{2}m.V_C^2 = m.g(z_D - z_C)$$

$$\frac{1}{2}V_D^2 - \frac{1}{2}V_C^2 = g(AB.sin\alpha - r)$$

$$V_D^2 = 2.g(AB.sin\alpha - r) + V_C^2$$

$$V_D = \sqrt{2.g(AB.sin\alpha - r) + V_C^2}$$

$$V_D = \sqrt{2 \times 10 \times (2{,}0 \times \sin(60°) - 0{,}5) + 3{,}16^2}$$

$$V_D \approx 5{,}88\ m/s$$