

<b>Professeur</b>	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
<b>Chapitre</b>	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
<b>Niveaux</b>	Bac français / 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac International SM

# Limites et Continuité

## I) LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

### 1- Rappels

$P$  et  $Q$  deux fonction polynôme  $x_0 \in \mathbb{R}$   $a \in \mathbb{R}^*$

#### Apprendre par cœur

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$	5) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ si $x_0 \geq 0$
2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ si $Q(x_0) \neq 0$	6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$	8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$ 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$
5) $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$ si $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

**Exercice1 :** Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$	2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$
3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$	4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$
5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$	

**Indications =>** vérifiez s'il s'agit d'une FI, utiliser la propriété des limites des polynômes à l'infini.

**Solution détaillée =>** <https://www.youtube.com/watch?v=ZVNxhEflSc>

**Exercice2 :** (Limites à droite et à gauche)

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de  $f$  en  $x_0 = -1$

**Indications =>** Etudier la limite par valeur inférieure et par valeur supérieure

**Réponse =>** limite = 0

**Solution détaillée =>** <https://www.youtube.com/watch?v=cltdPFFpPcY>

<b>Professeur</b>	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
<b>Chapitre</b>	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
<b>Niveaux</b>	Bac français / 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac International SM

## II) CONTINUITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de centre  $a$ . On dit que la fonction  $f$  est continue en  $a$  si elle admet une limite finie en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Apprendre par cœur

### Exercice 3

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}; \text{ si } x \neq 3 \text{ et } f(3) = 7$$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 3$

Indications => division euclidienne

Réponse => continue

Solution détaillée => <https://www.youtube.com/watch?v=gTFInzQuly0>

### Exercice 4

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\tan x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

Indications => conjugué + identité remarquable + faire apparaître  $x/\tan(x)$

Réponse => continue en 0

Solution détaillée => <https://www.youtube.com/watch?v=XCVM3k1qPE8>

### Exercice 5

avec  $m$  paramètre réel

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1}; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases}$$

déterminer la valeur du réel  $m$  pour laquelle

$f$  est continue en  $x_0 = 1$

Indications => changement de variable + Faire apparaître  $\sin(k)/k$  en 0

Réponse =>  $m = -\pi$

Solution détaillée => <https://www.youtube.com/watch?v=dPLbSXzHQVQ>

<b>Professeur</b>	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
<b>Chapitre</b>	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
<b>Niveaux</b>	Bac français / 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac International SM

## Définition

1) Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a + r[$  où  $r > 0$   
On dit que la fonction  $f$  est continue à droite de  $a$  si elle admet une limite finie à droite en  $a$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

2) Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a - r, a]$  où  $r > 0$   
On dit que la fonction  $f$  est continue à gauche de  $a$  si elle admet une limite finie à gauche en  $a$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

**Exercice 6** Soit  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2; \text{ si } \dots x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 1}; \text{ si } \dots x > 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de  $f$  à droite et à gauche de  $x_0 = 0$

**Indications =>** Appliquez la définition

**Réponse =>** continue à gauche et à droite

**Solution détaillée =>** <https://www.youtube.com/watch?v=Zm14uSkZ56g>

**Théorème :** Une fonction est continue en un point  $a$  si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de  $a$

Donc :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$  ssi

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Apprendre par cœur

Apprendre par cœur

**Exercice 7** Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$  si  $x \neq 1$

$$\text{Et : } f(1) = 2$$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 1$

**Indications =>** Calculez les limites à gauche et à droite ....

**Réponse =>** continue à droite mais pas à gauche donc discontinue en 1

**Solution détaillée =>** <https://www.youtube.com/watch?v=-cEDYS6yHpc>

<b>Professeur</b>	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
<b>Chapitre</b>	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
<b>Niveaux</b>	Bac français / 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac International SM

## Prolongement par continuité

**Théorème et définition :** Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$  ;  $a$  un réel tel que  $a \notin D_f$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  (finie)

← Apprendre par cœur

La fonction  $f$  définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } \dots x \neq a \\ f(a) = l \end{cases}$$

Est une fonction continue en  $a$  et s'appelle un prolongement par continuité de la fonction  $f$  en  $a$

**Exercice 8** Soit  $f$  une fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \quad \text{Donner un prolongement par}$$

continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 0$

**Indications =>** Calculez la limite de  $f$  en 0.....

**Solution détaillée =>** <https://www.youtube.com/watch?v=2NydxamzrGM>

## III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

### Définition

- 1) On dit que  $f$  est continue sur l'ouvert  $]a, b[$  [si elle est continue en tout point de  $]a, b[$
- 2) On dit que  $f$  est continue sur  $[a, b[$  si elle est continue sur  $]a, b[$  et à droite de  $a$
- 3) On dit que  $f$  est continue sur  $]a, b]$  si elle est continue sur  $]a, b[$ , à droite de  $a$  et à gauche de  $b$

← Apprendre par cœur

<b>Professeur</b>	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
<b>Chapitre</b>	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
<b>Niveaux</b>	Bac français / 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac International SM

**Propriétés :** 1) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$  alors :

a)  $f + g$     b)  $f \times g$     c)  $|f|$

Sont des fonctions continues en  $a$

2) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$  et  $g(a) \neq 0$  alors

a)  $\frac{1}{g}$     b)  $\frac{f}{g}$  sont des fonctions continues en  $a$ .

3) Si  $f$  une fonction continue en  $a$  et  $f(a) \geq 0$  alors :  $\sqrt{f}$  est continue en  $a$



Apprendre par cœur

**Propriétés :** 1) Toute fonction polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$

2) Les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  sont continues sur  $\mathbb{R}$

3) La fonction  $\tan$  est continue sur tous les intervalles de la forme :  $]-\pi/2 + k\pi ; \pi/2 + k\pi[$  (où  $k \in \mathbb{Z}$ )

## Continuité de la composition de deux fonctions

**Théorème :** Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  tels que  $f(I) \subset J$  et  $x_0$  un élément de  $I$ .

1) Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  continue en  $f(x_0)$  alors  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

2) Si  $f$  est continue sur  $I$  et  $g$  continue en  $f(I)$  alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

## Exemples

1) Soit  $f$  une fonction définie par  $f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$   
Montrons que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

2) Soit  $g$  une fonction définie par

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{1 + \sin^2 x}}$$

Montrons que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$

Décomposez  $f(x)$  en deux fonctions continues, N'oubliez pas de vérifier que l'image de la 1<sup>ère</sup> fonction est bien incluse dans celle de la 2<sup>ème</sup>

<b>Professeur</b>	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
<b>Chapitre</b>	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
<b>Niveaux</b>	Bac français / 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac International SM

## Limites des fonctions composées

**Théorème** : Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $x_0$  telle  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$   
si  $v$  est continue en  $l$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = v(l)$

**Exercice 9** : Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \pi\right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

**Indications =>** Utilisez le théorème des limites des fonctions composées

**Réponse =>** 1 et -1

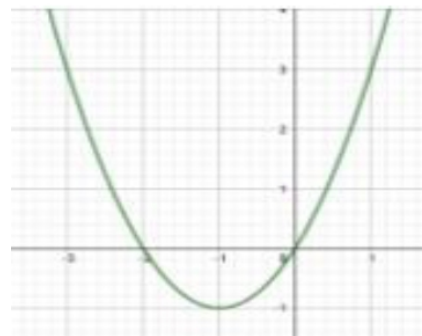
**Solution détaillée =>** <https://www.youtube.com/watch?v=h3NQop6JQcl>

## IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

### 1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

**Activité** : Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction  $f(x) = x^2 + 2x$

Déterminer graphiquement les images des intervalles :  $I_1 = [0, 1]$  ,  $I_2 = [-3, -1]$  ;  $I_3 = [-3, 1]$

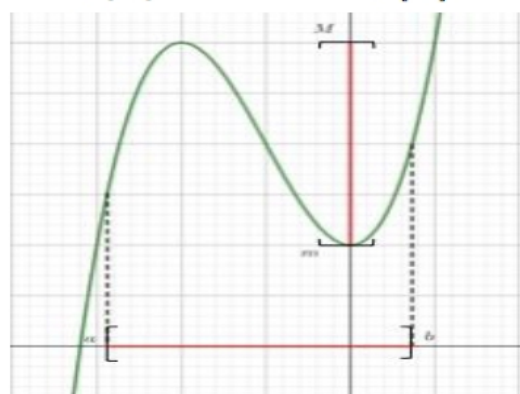


<b>Professeur</b>	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
<b>Chapitre</b>	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
<b>Niveaux</b>	Bac français / 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac International SM

### **Théorème : (Admis)**

L'image d'un segment  $[a, b]$  par une fonction continue est le segment  $[m, M]$  où :

$$m = \min_{x \in [a; b]} f(x) \text{ et } M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$$



### **Cas particulier :**

1) Si  $f$  est continue croissante sur  $[a, b]$  alors

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

2) Si  $f$  est continue décroissante sur  $[a, b]$  alors

$$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$$

## **2) Image d'un intervalle**

### **Théorème général**

Théorème (admis) : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

### **Cas d'une fonction strictement monotone**

1)  $f$  continue et strictement croissante sur

L'intervalle  $I$  et  $a \in I$  et  $b \in I$

$$f([a; b]) = [f(a); f(b)] \text{ et } f(]a; b]) = \left[ f(a); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$$

$$f(]a; b]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); f(b) \right[ \text{ et } f(]a; b[) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$$

<b>Professeur</b>	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
<b>Chapitre</b>	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
<b>Niveaux</b>	Bac français / 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac International SM

**2)  $f$  continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $I$  et  $a \in I$  et  $b \in I$**

$$f([a;b]) = [f(b); f(a)] \quad \text{et} \quad f([a;b[) = \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x); f(a) \right]$$

$$f(]a;b]) = \left[ f(b); \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right] \quad \text{et} \quad f(]a;b[) = \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right]$$

**Exercice 10** Soit  $f$  une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

Déterminer les images des intervalles suivants :

$[0, 1]$  ;  $[-2, -1[$  ; ...

La croissance d'une fonction homographique de la forme  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

- Si  $ad - bc > 0$  : La fonction est strictement **croissante** sur ses intervalles de définition.
- Si  $ad - bc < 0$  : La fonction est strictement **décroissante** sur ses intervalles de définition.

Rappel sur les fonctions homographiques

**Indications =>** calculez  $D_f$  + montrez que  $f$  est croissante + utilisez le théorème general

**Solution détaillée =>** [https://www.youtube.com/watch?v=e1\\_n7rPX9Yw](https://www.youtube.com/watch?v=e1_n7rPX9Yw)

## V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERES

### 1) Cas général

**Théorème T.V.I :** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$

<b>Professeur</b>	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
<b>Chapitre</b>	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
<b>Niveaux</b>	Bac français / 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac International SM

## 2) Cas $f$ strictement monotone.

### **Théorème T.V.I (cas $f$ strictement monotone)**

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur  $[a, b]$ .

Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe un et un seul  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$



## 3) Corolaires

**Corolaire1 (T.V.I)** : Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Si  $f(a) \times f(b) < 0$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur  $[a, b]$ . Si  $f(a) \times f(b) < 0$  il existe un et un seul  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = 0$

**Exercice 11** : Montrer que l'équation :  $x^3 + x + 1 = 0$   
Admet une racine unique dans  $] -1; 0[$

**Indications =>** utilisez le Théorème des valeurs intermédiaires

**Solution détaillée =>** <https://www.youtube.com/watch?v=iURH5AUjQ4>

## VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

### 1) Le théorème

<b>Professeur</b>	Bahloul Khalid (+212) 622-17-65-52
<b>Chapitre</b>	Limites et continuité (l'essentiel du cours + applications)
<b>Niveaux</b>	Bac français / 1 <sup>ère</sup> et 2 <sup>ème</sup> Bac International SM

← Apprendre par cœur

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , On a  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie de  $J = f(I)$  vers  $I$ .  
 donc  $f$  est une bijection de  $I$  vers  $f(I)$   
 D'où  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  et on a :

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in f(I)$$

$$(f^{-1} \circ f)(y) = y \quad \forall y \in I$$

**Exercice 12** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

- 1) Montrer que la fonction  $g$  la restriction de  $f$  sur intervalle  $I = ]-2; +\infty[$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un  $J$  qu'il faut déterminer.
- 2) Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $J$

Solution détaillée => <https://www.youtube.com/watch?v=8gIA-9f5C7Y>

### 3) Propriété de la fonction réciproque

**Propriété 1 :** Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $f^{-1}$  à la même monotonie sur  $J$  que celle de  $f$  sur  $I$ .

**Preuve :**

$$T_{f^{-1}} = \frac{f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{f(x_1) - f(x_2)}$$

$$T_{f^{-1}} = \frac{1}{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{y_1 - y_2}}$$

Donc le taux de  $f^{-1}$  sur  $J$  à le même signe que le taux de  $f$  sur  $I$   
 Et on conclut.

**Propriété 2 :** Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $(C_{f^{-1}})$  et  $(C_f)$  sont symétriques par rapport à  $:(\Delta) y = x$